

UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA

INSTITUTO SUPERIOR DE ECONOMIA E GESTÃO

MESTRADO EM CIÊNCIAS ACTUARIAIS

MODELAÇÃO DO RISCO DE TAXA DE JURO

NAS EMPRESAS SEGURADORAS

Cláudio Torpes Rebelo

ORIENTAÇÃO: Prof. Doutor Onofre Alves Simões

Júri

Presidente: Prof. Doutor Onofre Alves Simões

Vogais: Prof. Doutora Maria de Nazaré Barroso

Prof. Doutor Raul Manuel da Silva Laureano

Maio 2009

Resumo

A volatilidade das taxas de juro tem consequências directas no valor presente dos fluxos monetários (cash flows) futuros. Deste modo, as companhias de seguros estão particularmente expostas ao risco de taxa de juro, vindo este explicitamente reconhecido no projecto de Solvência II.

O objectivo do presente trabalho consiste assim em descrever o problema do risco de taxa de juro e apresentar algumas estratégias de protecção (imunização) face a este mesmo risco.

Será dada mais ênfase ao risco de taxa de juro dos activos de rendimento fixo, embora se dedique um capítulo ao dos activos de rendimento incerto.

Por fim analisa-se o exercício proposto no QIS4 (*Quantative Impact Study*) de modo a aferir se este é adequado para captar a exposição ao risco de uma carteira hipotética de acidentes de trabalho.

Palavras-chave: Risco de taxa de juro; imunização; duração; convexidade; Solvencia II; QIS4.

Abstract

Interest rate volatility has a direct impact on the value of future cash flows. As recognized by the Solvency II project, insurance companies are particularly exposed to what is known as interest rate risk.

This dissertation aims to describe interest rate risk and some immunization theories focusing on fixed income securities. However, we dedicate one brief chapter to variable income securities as well.

Finally, we will analyze the Quantative Impact Study 4 (QIS4) exercise concerning the capital charge for interest rate risk, in order to assess its suitability in measuring the risk exposure of a hypothetical workers compensations portfolio.

Keywords: Interest rate risk, immunization, duration, convexity, Solvency II, QIS4.

Agradecimentos

Aos meus pais, que me incentivaram (patrocinaram) a tomar a decisão de me inscrever neste mestrado. A eles dedico este trabalho, o que significa que vão ter de lê-lo do princípio ao fim.

Ao Professor Onofre Simões, não só por todo o seu apoio e orientação durante a elaboração deste trabalho, mas também pelo seu apoio durante a parte lectiva.

Agradecimento extensível ao restante corpo docente do ISEG, nomeadamente ao Professor Andrade e Silva, à Professora Lourdes Centeno e ao Professor Egídio dos Reis.

Aos meus colegas de mestrado, em especial, os meus colegas brasileiros, Carlos, Germano e Rafael. VALEU!

À Dra. Sara Domingues, actuária responsável da Mútua dos Pescadores, pelo apoio e facilidades concedidas.

Aos meus amigos e a todas as pessoas que de alguma forma me ajudaram durante este processo. Prometo compensá-los pelo tempo em que estive ausente.

E, por fim, um agradecimento especial à minha noiva Cláudia que esteve comigo desde o primeiro momento do mestrado até ao último. Sem o teu incentivo este trabalho nunca teria sequer chegado ao título.

Índice

Resumo	ii
Abstract	iii
Agradecimentos.....	iv
Lista de Tabelas	x
Lista de Figuras.....	xiii

Introdução	1
Capítulo 1 - Risco de taxa de juro no contexto de cash flows certos e choques paralelos	4
1.1 Conceitos básicos.....	4
1.2 Duração de Macaulay e Duração modificada.....	13
1.2.1 Definições	14
1.2.2 Propriedades da Duração de Macaulay.....	15
1.2.3 Duração de uma carteira de obrigações	17
1.2.4 A Duração como instrumento de imunização de uma obrigação num horizonte temporal.....	18
1.3 Convexidade	20
1.4 Imunização no contexto de activos e passivos - Condições de Redington	23
1.5 Estratégias activas e convexidade.....	25
1.5.1 Estratégia de antecipação	25
1.5.2 Estratégia Barbell-Bullet.....	25
1.6 Duração de Fisher e Weil.....	28

1.6.1	Definição	28
1.6.2	Imunização no horizonte temporal no modelo de Fisher e Weil.....	29
1.6.3	Estimativas da duração e convexidade	31
1.7	Limitações da duração nos modelos de Macaulay e Fisher e Weil	32
1.7.1	Limitações no modelo de Macaulay	32
1.7.2	Limitações da duração de Fisher e Weil	33
 Capítulo 2 - Risco de taxa de juro num contexto de choques não paralelos		35
2.1	M-Absoluto e M-Quadrado	37
2.1.1	M-Absoluto	37
2.1.2	M-Quadrado	42
2.2	Modelo de vector de durações e Modelo de vector de durações generalizado	47
2.2.1	Modelo de vector de durações.....	47
2.2.1.1	Estratégias de <i>hedging</i> no Modelo de vector de durações	50
2.2.2	Modelo de vector de durações generalizado	51
2.3	Modelo Direccional	53
2.3.1	Construção do Modelo Direccional.....	53
2.3.2	Desigualdades no Modelo Direccional	56
2.4	Modelo Parcial.....	59
2.4.1	Duração e Convexidade Parcial.....	59
2.4.2	Modelação paramétrica no contexto parcial.....	60
2.4.3	Choque equivalente na <i>yield to maturity</i>	60
2.4.4	Choque paralelo equivalente	62
2.4.5	Alavanca “duracional”	62
2.4.6	Multiplicador “duracional”	65

2.5	Modelo Key Rate.....	67
2.5.1	Construção do Modelo <i>key rate</i>	67
2.6	Outras abordagens.....	68
Capítulo 3 - Modelos de duração para activos com cash flows incertos		70
3.1	Medidas de Duração e Convexidade para obrigações com opções embutidas	71
3.1.1	Construção da Árvore Binomial das taxas futuras	72
3.1.2	Avaliação de uma obrigação de cupão fixo livre de opções	78
3.1.3	Avaliação de uma obrigação com opção <i>call</i>	79
3.1.4	Avaliação de uma obrigação com opção <i>put</i>	79
3.1.5	Avaliação de uma obrigação de cupões indexados com <i>cap</i>	80
3.1.6	<i>Spread</i> de opção-ajustado	83
3.1.7	Duração efectiva e convexidade efectiva.....	84
3.2	Modelos de duração de acções	86
3.2.1	Modelo de descontos de dividendos de Gordon.....	87
3.2.2	Modelo Empírico de Leibowitz.....	88
3.2.3	Abordagem diferencial total.....	90
3.2.4	Modelo Standard & Poors.....	92
Capítulo 4 - Estimação da EPTJ		95
4.1	Método <i>Bootstrap</i>	96
4.2	Métodos Paramétricos	99
4.2.1	Modelo Nelson-Siegel	99
4.2.2	Modelo Svensson	102
4.3	Métodos <i>spline</i>	103

4.3.1	Interpolação por <i>spline</i> cúbico	103
4.3.2	<i>Spline</i> de regressão de McCulloch	107
4.3.3	Modelo de Fisher-Nychka-Zervos (<i>smoothing spline</i>).....	111
4.3.4	Modelo de Waggoner	112
4.4	Evolução dinâmica das taxas de juro (Modelos Vasicek e CIR).....	113
4.4.1	Abordagem geral de Vasicek	114
4.4.2	Modelo fundamental de Vasicek.....	115
4.4.3	Modelo CIR.....	116
Capítulo 5 - Risco de taxa de juro, Duração e Convexidade. Ilustração num contexto do QIS4.....		119
5.1	Descrição do exercício do QIS4 para o risco de taxa de juro.....	119
5.2	Passivo da carteira de AT.....	121
5.3	Activos da carteira AT	122
5.4	Efeitos dos choques propostos pelo QIS4 na carteira AT.....	123
5.4.1	Efeitos sobre o passivo.....	126
5.4.2	Efeitos sobre o activo.....	126
5.5	Exercício de risco de taxa de juro no modelo de duração direcciona.....	132
5.5.1	Definição do vector de direcção	132
5.5.2	Duração e convexidade direcciona da carteira.....	133
5.5.3	Estratégia de imunização no modelo de duração direcciona	136
5.5.4	Vector colinear da carteira (\vec{N}_0) dos Exemplos 2, 3 e 4	138
5.6	Modelo vector de durações (sob a hipótese do modelo de Svensson).....	139
5.6.1	Análise dos cenários propostos pelo QIS4.....	140
5.6.2	Qualidade da aproximação aos choques no modelo vector de durações ...	142

5.7	Análise de cenários adicionais.....	145
5.7.1	Cenários hipotéticos.....	146
5.7.2	Imunização de ordens superiores.....	148
5.7.3	Comparação dos cenários do QIS4 com as EPTJ do BCE	151
5.7.3.1	Um teste às condições de Redington	152
5.7.3.2	Exemplo 6 revisto	155
5.7.3.3	Imunização de terceira ordem.....	156
	Conclusão	158
	Anexo 1 - Justificação do grau do polinómio do <i>spline</i> de interpolação	161
	Anexo 2 - Parâmetros dos <i>splines</i>.....	163
	Anexo 3 - Vectores de direcção para os cenários ascendente e descendente.....	170
	Anexo 4 - Vectores colineares unitários das estratégias 2, 3 e 4.....	171
	Anexo 5 - Valor presente dos cash flows do título OT 4,10% Abr 2037 tendo em conta os cenários do QIS4 e <i>steep</i>.....	172
	Bibliografia.....	173

Lista de Tabelas

Tabela 3.1 - Obrigações e taxas de juro à vista	76
Tabela 5.1 - Taxas de juro à vista do cenário inicial.....	120
Tabela 5.2 - Choques à EPTJ propostos no QIS4.....	120
Tabela 5.3 - Cash flows das responsabilidades	122
Tabela 5.4 - Obrigações do Tesouro Nacionais.....	123
Tabela 5.5 - Cash flows actualizados do passivo, duração e convexidade	126
Tabela 5.6 - Estratégia de diversificação do investimento.....	127
Tabela 5.7 - Cash flows da OT 5,45% Set 2013 actualizados, duração e convexidade	128
Tabela 5.8 - Variação líquida na estratégia de diversificação do investimento	128
Tabela 5.9 - Estratégia de imunização de F&W	129
Tabela 5.10 - Variação líquida na estratégia de imunização de F&W.....	129
Tabela 5.11 - Estratégia de imunização com $C(A) \geq C(L)$	130
Tabela 5.12 - Variação líquida na estratégia de imunização com $C(A) \geq C(L)$	130
Tabela 5.13 - Estratégia de imunização com $A_0 < L_0$	131
Tabela 5.14 - Variação líquida na estratégia de imunização com $A_0 < L_0$	131
Tabela 5.15 - Duração, Convexidade e aproximações no modelo direccionado do passivo	135
Tabela 5.16 - Duração, convexidade e aproximações no modelo direccionado do activo para o cenário ascendente.....	136
Tabela 5.17 - Duração, convexidade e aproximações no modelo direccionado do activo para o cenário descendente.....	136
Tabela 5.18 - Estratégia de imunização no modelo direccionado	137

Tabela 5.19 - Variação líquida na estratégia de imunização direccional	137
Tabela 5.20 - Efeitos na variação líquida dos vectores colineares (Exemplos 2, 3 e 4)	138
Tabela 5.21 - Parâmetros do MS para os cenários inicial, ascendente e descendente.	140
Tabela 5.22 - Impacto no passivo dos cenários inicial, ascendente e descendente no MS	142
Tabela 5.23 - Duração de ordens superiores do passivo no MS.....	142
Tabela 5.24 - Vector de choques para os cenários ascendente e descendente de ordem 10	142
Tabela 5.25 - Aproximações à variação percentual instantânea no modelo vector de durações.....	144
Tabela 5.26 - Estratégia de imunização com $A_0 < L_0$ no MS	146
Tabela 5.27 - Variação líquida da estratégia de imunização com $A_0 < L_0$ no MS.....	146
Tabela 5.28 - Parâmetros dos cenários adicionais	146
Tabela 5.29 - Variação líquida dos cenários adicionais na estratégia de imunização com $A_0 < L_0$ no MS.....	147
Tabela 5.30 - Variações líquidas tendo em conta os choques do QIS4 e o choque <i>steep</i>	148
Tabela 5.31 - Proporções a investir em cada título.....	149
Tabela 5.32 - Impacto dos diversos cenários na estratégia de imunização de ordens superiores.....	150
Tabela 5.33 - Quantidades a investir na estratégia A e B	153
Tabela 5.34 - Impacto na carteira na estratégia A face a choques paralelos.....	153
Tabela 5.35 - Impacto na carteira na estratégia B face a choques paralelos	154

Tabela 5.36 - Variações na carteira face aos choques dos cenários ascendente e descendente para as estratégias A e B.....	154
Tabela 5.37 - Nível de imunização da estratégia A face a 498 observações da EPTJ do BCE.....	155
Tabela 5.38 - Nível de imunização da estratégia B face a 498 observações da EPTJ do BCE.....	155
Tabela 5.39 - Nível de imunização da estratégia do Exemplo 6 face a 498 observações da EPTJ do BCE	156
Tabela 5.40 - Proporções/quantidades a investir em cada OT na imunização de 3ª ordem	157
Tabela 5.41 - Nível de imunização da estratégia de terceira ordem face a 498 observações da EPTJ do BCE	157

Lista de Figuras

Figura 1.1 - Aproximação linear e quadrática do valor de uma obrigação	21
Figura 3.1 - Árvore binomial a três anos das taxas futuras anuais	72
Figura 3.2 - Cálculo do valor de uma obrigação num determinado nodo.....	74
Figura 3.3 - Árvore binomial de uma obrigação livre de opções	78
Figura 4.1 - Diversas configurações da EPTJ no modelo Nelson-Siegel	101
Figura 5.1 - <i>Natural cubic spline</i> do cenário inicial	123
Figura 5.2 - <i>Clamped cubic spline</i> e <i>spline</i> de McCulloch do cenário inicial.....	124
Figura 5.3 - <i>Clamped cubic spline</i> e <i>spline</i> de McCulloch do cenário ascendente	125
Figura 5.4 - <i>Natural cubic spline</i> e <i>spline</i> de McCulloch do cenário descendente	125
Figura 5.5 - EPTJ do vector colinear de direcção de norma 11,815 do Exemplo 2	139
Figura 5.6 - EPTJ do cenário inicial no MS	141
Figura 5.7 - EPTJ do cenário ascendente no MS.....	141
Figura 5.8 - EPTJ do cenário descendente no MS.....	141
Figura 5.9 - EPTJ para diversos cenários.....	147
Figura 5.10 - Estimação da duração do Índice S&P 500	151

Introdução

Nas últimas duas décadas tem-se assistido a uma volatilidade sem precedentes na estrutura de prazos das taxas de juro (EPTJ), apesar dos esforços das políticas monetárias na zona Euro e nos EUA para a sua estabilização. Esta crescente volatilidade torna a previsão da evolução das taxas de juro uma tarefa cada vez menos exacta, o que tem consequências directas na exposição ao risco de taxa de juro de várias instituições financeiras, das quais se destacam os bancos, as companhias de seguros e as sociedades gestoras de fundo de pensões.

Deste modo, as estratégias de imunização (estratégias de protecção do valor de uma determinada carteira face a choques na EPTJ) têm vindo a merecer cada vez mais destaque no meio académico e profissional.

O risco de taxa de juro é por isso explicitamente reconhecido no Projecto de Solvência II (projecto de revisão do regime de solvência para a actividade seguradora na União Europeia), através dos estudos de impacto quantitativo (QIS).

O QIS consiste, em termos genéricos, numa série de exercícios propostos pelo Comité de Supervisores Europeus de Seguros e de Pensões Complementares de Reforma (CEIOPS) às entidades que compõem a indústria seguradora, de modo a avaliar os impactos ao nível Europeu do novo regime de Solvência.

Em termos gerais, a cada seguradora será exigido um nível de capital de acordo com o perfil de risco subscrito pela mesma.

O objectivo do presente trabalho consiste, portanto, em expor a problemática do risco de taxa de juro e algumas estratégias de imunização, para que seja possível analisar de uma forma crítica o exercício proposto no QIS4 relativamente à carga de capital referente ao risco de taxa de juro. Pode considerar-se que é composto por duas partes: na primeira

(Capítulos 1 a 4), faz-se um *survey* da literatura essencial sobre o assunto; na segunda, (Capítulo 5), faz-se uma ilustração prática.

Deste modo, no primeiro capítulo, serão introduzidos alguns conceitos fundamentais relativamente a activos de rendimento fixo e à sua estreita relação com a EPTJ. Introduzem-se também os parâmetros de risco ‘duração’ e ‘convexidade’ para além de algumas estratégias clássicas de imunização, pressupondo que as taxas se movimentam de forma paralela.

No segundo capítulo, a restrição de choques paralelos será relaxada, de modo que os choques na EPTJ sejam mais consistentes com a realidade empírica. Apresentam-se, então, novos modelos de risco de taxa de juro, tendo em conta que num contexto de choques assimétricos não infinitesimais os conceitos de duração e convexidade são redefinidos.

No terceiro capítulo, analisa-se sucintamente a duração de activos de rendimento incerto, nomeadamente, a duração de obrigações de cupão variável e a duração de acções. Para as obrigações de cupão variável apresenta-se um modelo de duração baseado na árvore binomial das taxas instantâneas, enquanto para a duração de acções os modelos apresentados se diferenciam grosso modo entre modelos de desconto de dividendos e modelos empíricos. O objectivo deste capítulo consiste em salientar que o risco de taxa de juro não é exclusivo dos activos de rendimento fixo.

No quarto capítulo, expõem-se algumas metodologias de estimação da EPTJ actual, uma vez que esta não é directamente observável no mercado. Faz-se ainda uma breve referência à modelação estocástica da mesma.

Para concluir, o último capítulo constitui uma das partes fundamentais desta dissertação, e é dedicado à descrição e análise do exercício proposto pelo QIS4 relativamente à carga de capital para o risco de taxa de juro. Tomando uma carteira hipotética de acidentes de trabalho, em que os activos são compostos por Obrigações do Tesouro nacionais, são aplicados alguns dos modelos descritos nos capítulos anteriores tendo em conta diversas estratégias de investimentos. De seguida, alguns cenários hipotéticos são comparados com os cenários propostos no QIS4, de modo a tirar conclusões importantes sobre a adequabilidade do exercício em captar a exposição ao risco de taxa de juro da carteira em questão.

Por fim, faz-se o teste a algumas estratégias de investimento tendo em conta 498 observações diárias da EPTJ estimadas pelo Banco Central Europeu. O objectivo deste teste é aferir se existe algum suporte empírico para as conclusões retiradas no ponto anterior.

Capítulo 1 - Risco de taxa de juro no contexto de cash flows certos e choques paralelos

Neste capítulo começa-se por introduzir alguns conceitos e definições essenciais para os modelos que irão ser apresentados. Posteriormente, definem-se dois tipos de medidas paramétricas para o risco de taxa de juro: duração e convexidade, assim como algumas estratégias de investimento. Por fim, evidenciam-se algumas limitações aos modelos expostos.

1.1 Conceitos básicos

Neste ponto apresenta-se alguns conceitos básicos, de modo a permitir uma melhor compreensão de termos que serão empregues ao longo do presente texto.

Uma obrigação é um título de dívida transaccionável, que representa uma fracção de um empréstimo obrigacionista, emitido por uma entidade (governamental ou empresarial) com uma duração superior a um ano.

O valor emprestado designa-se de principal e é muitas vezes referido como o valor nominal da obrigação. Se a cotação da obrigação for superior, igual ou inferior ao valor nominal diz-se que a obrigação está cotada acima do par, ao par e abaixo do par, respectivamente. No mercado a cotação vem normalmente expressa como percentagem do valor nominal.

A data de vencimento é denominada data de maturidade. O termo maturidade será usado para designar o tempo que vai desde a data presente à data de maturidade.

O contrato subjacente à obrigação poderá envolver uma serie de pagamentos recebidos com uma periodicidade regular (normalmente anual, semestral ou trimestral),

previamente definida. A esses montantes chamam-se cupões. A taxa do cupão é o resultado da divisão do valor anual destes pelo valor nominal da obrigação.

Se a taxa de cupão for fixa a obrigação designa-se obrigação de cupão fixo. No caso contrário será uma obrigação de cupão variável, que poderá estar sujeito a uma série de eventos futuros incertos.

Uma obrigação tradicional paga cupões fixos periódicos sem opções embutidas. No último período, para além do cupão, é amortizado 100% do valor nominal/principal.

As opções mais comuns são as *call*, isto é, o direito mas não a obrigatoriedade do emitente amortizar o principal num período determinado, pondo fim ao contrato subjacente, e as *put*, isto é, o direito mas não a obrigatoriedade do detentor do título receber o principal num período determinado, pondo fim ao contrato subjacente.

Se não houver lugar a pagamento de cupões a obrigação é denominada uma obrigação de cupão zero.

O risco do emissor não pagar os cupões ao investidor (credor) e/ou não reembolsar o principal chama-se risco de crédito. Várias agências atribuem uma classificação (*rating*) a cada título, conforme o risco de crédito subjacente.

À primeira vista poderia afirmar-se que uma obrigação tradicional de cupão fixo ou de cupão zero onde não haja risco de crédito, isto é, onde o investidor sabe com certeza os períodos e montantes dos valores a receber, terá uma rendibilidade anual fixa. No entanto, mesmo nestes casos, possuir um activo deste género (como por exemplo: Obrigações do Tesouro) não garante tal segurança.

- No caso do horizonte temporal do investidor ser superior ao recebimento de cash flows, existe o risco de reinvestimento dos montantes recebidos.

- No caso do horizonte temporal do investidor ser inferior à maturidade, existe o risco da variação da cotação do activo. Esta variação dá-se essencialmente por duas razões. A menos relevante prende-se com a passagem do tempo, pois à medida que a obrigação se aproxima da maturidade a sua cotação tende para o valor nominal; a mais relevante tem a ver com flutuações nas taxas de juro/desconto.

O valor de uma obrigação é igual ao valor presente dos seus cash flows, num contexto de ausência de arbitragem (tomada de uma posição financeira que origina um lucro garantido sem que haja a necessidade de investimento de capital próprio), pressupondo ausência de custos de transacção e de juros corridos, o que implica dois processos. Primeiro, determinar os cash flows esperados; segundo, descontar esses mesmos cash flows com uma taxa de juro apropriada. Fabozzi (1999) refere que cada cash flow gerado por um cupão e/ou principal deverá ser tratado individualmente como uma obrigação de cupão zero, uma vez que no mercado é possível transaccionar os cupões e o principal separadamente, o que é conhecido como a possibilidade de destaque de direitos.

O conjunto das taxas utilizadas para actualizar os cash flows em cada período denomina-se estrutura de prazos das taxas de juro (EPTJ). Nawalkha *et al* (2005) p. 44, apresentam a seguinte definição:

“The term structure of interest rates gives the relationship between the yield on an investment and the term to maturity of the investment”.

Logo, é evidente que só é correcto utilizar a mesma EPTJ para cash flows de natureza homogénea. Assim sendo, a EPTJ para uma obrigação de cupão fixo, sem risco de

crédito e livre de opções, também conhecida como *default free term structure*, é tipicamente medida através da rendibilidade anual das Obrigações do Tesouro de cupão zero para cada maturidade, indicando também o rendimento mínimo exigido para cada investimento. A estas rendibilidades chama-se curva de rendimentos. Tecnicamente, a curva de rendimentos não nos fornece directamente a EPTJ, uma vez que a falta de liquidez destes mercados e a inexistência de maturidades contínuas obriga à derivação da mesma. Para uma estimativa mais robusta, os cupões das Obrigações do Tesouro podem ser tratados como obrigações de cupão zero através de argumentos de arbitragem, veja-se McCulloch (1971).

Importa salientar que na literatura se encontram múltiplas formas e modelos de derivação e estimação da EPTJ, veja-se Choudhry (2004).

Para outros tipos de cash flows, Fabozzi (1999) refere que à *default free term structure* deverá ser adicionado um prémio de risco, isto é, um *spread*.

De seguida, definem-se taxas de juro à vista (*spot rates*) e taxas de juro futuras (*forward rates*). Um empréstimo contratado e iniciado numa determinada data irá dar origem a uma taxa de juro à vista. Um empréstimo que se inicia após a data de contrato irá originar uma taxa futura.

Seja $i(0, t)$ a taxa de juro à vista, acordada hoje, de um empréstimo/principal que será devido em t e seja $f(0, t, T)$ a taxa de juro futura, acordada hoje, mas a começar em t e devida em T . Na ausência de arbitragem e de custos de transacção, define-se a seguinte relação de equilíbrio no modelo discreto entre as duas aplicações

$$[1 + i(0, t)]^t [1 + f(0, t, T)]^{T-t} = [1 + i(0, T)]^T. \quad (1.1)$$

Caso a igualdade não se verifique, é possível tomar uma posição de arbitragem. Estes movimentos forçam a expressão a voltar novamente ao equilíbrio. A expressão (1.1) pode ser reescrita da seguinte forma

$$f(0, t, T) = \frac{[1 + i(0, T)]^{\frac{T}{T-t}}}{[1 + i(0, t)]^{\frac{t}{T-t}}} - 1 \quad (1.2)$$

De forma equivalente,

$$1 + i(0, T) = [1 + i(0, t)]^{\frac{t}{T}} [1 + f(0, t, T)]^{\frac{T-t}{T}} \quad (1.3)$$

Pode então concluir-se que a taxa de juro à vista de maturidade T é nada mais que a rendibilidade da média geométrica das taxas futuras, tendo em conta que $1 + i(0, t)$ é uma caso particular de uma taxa futura, ou seja, $f(0, 0, t) \equiv i(0, t)$.

Generalizando (1.2), vai obter-se

$$[1 + i(0, t_1)]^{t_1} [1 + f(0, t_1, t_2)]^{t_2 - t_1} \dots [1 + f(0, t_{n-1}, t_n)]^{t_n - t_{n-1}} = [1 + i(0, t_n)]^{t_n} \quad (1.4)$$

ou seja,

$$1 + i(0, t_n) = \prod_{j=1}^n [1 + f(0, t_{j-1}, t_j)]^{\frac{t_j - t_{j-1}}{t_n}} \quad (1.5)$$

em que t_1, t_2, \dots, t_n é uma partição arbitrária de $[0, T]$ em n intervalos, não necessariamente com a mesma amplitude.

A curva de rendimentos é, portanto, um conjunto de taxas de juro à vista. A EPTJ poderá ser obtida também através de taxas futuras ou pode-se considerá-la simplesmente como sendo horizontal (*flat*), isto é, pela rendibilidade até à maturidade, (*yield to maturity* - YTM).

O juro corrido (JC) é o juro acumulado entre o último cupão e o momento presente. Quando uma obrigação é transaccionada o vendedor tem direito a uma proporção do próximo cupão. As cotações, na maioria das vezes, correspondem ao *clean price*, ou

seja não incluem este custo adicional. O valor efectivamente pago pelo comprador corresponde ao *dirty price*. O juro corrido é dado por

$$JC = c \left(\frac{t_0 - t_p}{t_q - t_p} \right), \quad (1.6)$$

em que,

c é o valor do próximo cupão, $t_0 - t_p$ é o número de dias entre a data do cupão anterior e a data actual e $t_q - t_p$ é a diferença de dias entre a data do último cupão e a data do próximo cupão.

A aplicação de (1.6) implica o uso de uma convenção de base de contagem dos dias.

As mais comuns são:

- Actual/Actual: em que tanto $t_0 - t_p$ e $t_q - t_p$ são medidos usando o número de dias entre as datas.
- Actual/360: em que $t_0 - t_p$ é medido da mesma forma que no Actual/Actual e $t_q - t_p$ é igual a $360/k$, em que k é o número de pagamento de cupões por ano.
- 30/360: em que $t_0 - t_p$ é dado por $30 \times \text{nº de meses inteiros entre } t_0 - t_p + \text{nº de dias remanescentes}$ e $t_q - t_p$ é calculado da mesma forma que no Actual/360.

Tendo em conta que o valor teórico de uma obrigação é igual à soma dos cash flows descontados, consideram-se as seguintes variáveis:

P_0 = valor presente de uma obrigação sem risco de crédito, que será designada por função-preço.

CF_t = cash flows recebidos no momento t .

k = número de cash flows por ano, ou seja, indica a periodicidade do cupão.

i_t = taxa de juro à vista no momento presente para um contrato com uma maturidade de t anos, ou seja, i_t representa a EPTJ.

T = maturidade da obrigação, ou seja, o número de anos que faltam para a maturidade.

Com taxas de desconto e recebimentos discretos, tem-se

$$P_0 = \sum_{t=1}^T CF_t (1+i_t)^{-t}. \quad (1.7)$$

No entanto, geralmente não se conhecem de forma directa as taxas de juro à vista, dado que dificilmente estarão disponíveis Obrigações do Tesouro de cupão zero, cujas maturidades coincidam exactamente com os termos da obrigação acima. Não obstante, se Z_0 é o valor de uma obrigação do tesouro de cupão zero no momento presente, VN o seu valor nominal e t a sua maturidade, então i_t terá de ser tal que $Z_0(1+i_t)^t = VN$, o que implica que a taxa de juro à vista é simplesmente $i_t = (VN/Z_0)^{1/t} - 1$.

Utilizando taxas contínuas equivalentes $y(t)$, pode-se reescrever (1.7) como

$$P_0 = \sum_{t=1}^T CF_t e^{-y_t \times t}. \quad (1.8)$$

Considere-se ainda o valor presente de uma obrigação com cash flows e capitalizações contínuas, isto é

$$P_0 = \int_0^T CF(t) e^{-i_t \times t} dt. \quad (1.9)$$

O facto de não haver taxas à vista directamente observáveis motiva frequentemente a dedução da função-preço através de uma única taxa de desconto, ou seja, considera-se a EPTJ como sendo horizontal. Embora seja uma prática corrente, a hipótese é pouco realista e as suas implicações serão analisadas no presente texto.

Considerando uma obrigação de cupão anual, sem risco de crédito, de cupão fixo (c) com amortização do principal (M_T) na maturidade, vem

$$P_0 = \frac{c}{1+i} + \frac{c}{(1+i)^2} + \dots + \frac{c+M_T}{(1+i)^T}. \quad (1.10)$$

O facto de se usar uma única taxa de desconto anual facilita o estudo da função-preço.

Note-se que (1.10) implica a avaliação do título na data de aniversário de um cupão.

Efectuando cálculos elementares, deduz-se facilmente que a expressão anterior pode escrever-se como

$$P_0 = \frac{c}{i} \left[1 - \frac{1}{(1+i)^T} \right] + \frac{M_T}{(1+i)^T}. \quad (1.11)$$

Recorrendo a (1.11), é imediato que $\lim_{T \rightarrow 0} P_0 = M_T$, isto é, à medida que se tende para a maturidade o valor da obrigação tende para o valor nominal.

Por outro lado, se $T \rightarrow \infty$, então estamos na presença de uma obrigação perpétua, ou seja não existe lugar a reembolso do principal e P_0 tenderá para c/i .

Na prática, a obrigação é cotada como uma percentagem do valor nominal, seja

$$\frac{P_0}{M_T} = \frac{c / M_T}{i} \left[1 - \frac{1}{(1+i)^T} \right] + \frac{1}{(1+i)^T}. \quad (1.12)$$

A expressão (1.12) pode ser vista como uma média ponderada que estará sempre entre $(c/M_T)/i$ e 1. Daqui resulta que a cotação da obrigação estará acima do par se $c/M_T > i$ (c/M_T é a taxa periódica do cupão) e abaixo do par se se trocar o sinal da desigualdade. De qualquer modo, tenderá sempre para 1 à medida que $T \rightarrow 0$.

Se a taxa de cupão for igual a i , então a obrigação estará sempre cotada ao par independentemente de T , *Ceteris Paribus*.

Se T diminuir uma unidade, isto é, se se passar de t para $t+1$, o valor presente do valor nominal aumenta, mas a obrigação terá menos um cash flow. Tendo em conta (1.12), tem-se que

$$P_t = \frac{c}{i} + (1+i)^T \left[M_T - \frac{c}{i} \right] \quad (1.13)$$

$$e \quad P_{t+1} = \frac{c}{i} + (1+i)^{-(T-1)} \left[M_T - \frac{c}{i} \right]. \quad (1.14)$$

Se se efectuar a diferença (1.14) - (1.13), obtém-se, após simplificação,

$$\frac{P_{t+1} - P_t}{P_t} = i - \frac{c}{P_t}. \quad (1.15)$$

Com cupões e taxas contínuas, vem

$$\frac{1}{P(t)} \frac{dP}{dt} = i - \frac{c(t)}{P(t)}. \quad (1.16)$$

Da igualdade (1.10) conclui-se que a função-preço e i apresentam uma relação inversa.

A passagem do tempo está perfeitamente definida à partida, o que não acontece com as flutuações nas taxas de desconto. No entanto, à medida que a obrigação atinge a maturidade, a volatilidade do preço face à taxa de juro será cada vez menor.

A taxa de rendimento até à maturidade (já referida), conhecida por *yield to maturity* (YTM), é a taxa i para a qual o valor presente dos cash flows iguala o valor da obrigação no momento presente. O conceito é equivalente ao de taxa interna de rendibilidade de um investimento. Deste modo, tem-se a condição

$$P_0 = \sum_{t=1}^T CF_t (1+i)^{-t}. \quad (1.17)$$

Projectando o valor futuro da obrigação a partir de (1.10), obtém-se

$$P_0 (1+i)^T = c(1+i)^{T-1} + c(1+i)^{T-2} + \dots + c + M_T \quad (1.18)$$

Ou seja, o valor futuro de P_0 é igual ao valor futuro de todos os cash flows reinvestidos à taxa i . Portanto, a *yield to maturity* é equivalente a considerar-se uma EPTJ horizontal. A sua vantagem consiste na simplicidade do conceito e facilidade de aplicação, mas tem o senão de assumir que os cupões serão reinvestidos à mesma taxa

i. O pressuposto de que o investidor detém a obrigação até à maturidade é também uma hipótese restritiva.

A taxa de rendimento efectivo, TRE , tem como objectivo superar as duas principais limitações da YTM . Para isso determina-se o valor futuro, VF , associado ao horizonte temporal do investidor, H . A TRE será a taxa que transforma o valor presente da obrigação em VF . Isto é,

$$P_0 (1 + r_H)^H = VF, \quad (1.19),$$

onde r_H representa a taxa de rendimento efectivo associado ao horizonte temporal H .

Logo,

$$r_H = \left(\frac{VF}{P_0} \right)^{\frac{1}{H}} - 1. \quad (1.20).$$

A taxa de rendimento efectivo terá de ter em conta não só o valor futuro da obrigação, mas também as taxas de reinvestimento dos cupões, o que implica a previsão da evolução futura das taxas de juros, com o esforço adicional que essa tarefa envolve.

Para além da EPTJ exibir uma relação inversa face ao valor presente dos cash flows futuros, o estudo do risco de taxa de juro torna-se ainda mais relevante devido ao facto das suas flutuações serem difíceis de prever e poderem exibir magnitudes consideráveis.

1.2 Duração de Macaulay e duração modificada

A duração e convexidade surgem como medidas paramétricas do risco de taxa de juro.

A vantagem da análise paramétrica em relação à análise de cenários consiste em não haver necessidade de reavaliação da carteira para cada variação possível da EPTJ. A

desvantagem prende-se com o facto de se tratar de medidas sumárias da realidade assentes em pressupostos que podem ser discutíveis.

1.2.1 Definições

Frederick Macaulay (1938) define a duração de uma obrigação como sendo o período médio ponderado de recebimentos dos seus cash flows, em anos. Os pesos são obtidos em relação ao valor presente de cada cash flow e o factor de actualização é dado pela *yield to maturity* anual, i . De um modo formal, a duração de Macaulay numa data de recebimento de cupão é

$$D(i) = \frac{1}{k \times P_0} \left(\frac{c}{k} \left(1 + \frac{i}{k}\right)^{-1} + 2 \frac{c}{k} \left(1 + \frac{i}{k}\right)^{-2} + \dots + t \times k \left(\frac{c}{k} + M_T \right) \left(1 + \frac{i}{k}\right)^{-k \times T} \right), \quad (1.21)$$

onde as restantes variáveis mantêm o seu significado anterior.

A expressão (1.21) é equivalente a

$$D(i) = \frac{1}{k \times P_0} \sum_{t=1}^{k \times T} t \times CF_t \left(1 + \frac{i}{k}\right)^{-t}. \quad (1.22)$$

A importância da duração advém do facto de ser uma medida de sensibilidade da função-preço, face a variações na *yield to maturity*. Essa relação é mais visível se se considerar $k = 1$ e se aplicar a derivada da função-preço em ordem a i , isto é

$$\frac{dP}{di} = \frac{d}{di} \left(\sum_{t=1}^T CF_t (1+i)^{-t} \right) = - \frac{1}{1+i} \sum_{t=1}^T t \times CF_t (1+i)^{-t} \quad (1.23)$$

Dividindo (1.23) por P_0 , obtém-se

$$\frac{1}{P_0} \frac{dP}{di} = - \frac{D(i)}{1+i} = -D_m(i). \quad (1.24)$$

A expressão (1.24) é conhecida como a duração modificada e representa a aproximação de primeira ordem. Explicita também a estreita relação entre a duração de Macaulay e a

duração modificada. Sendo uma aproximação linear, a estimativa será tanto mais exacta quanto menor for a variação de i . Pressupõe, obviamente, uma EPTJ horizontal e portanto a deslocação da EPTJ será a mesma para todas as maturidades consideradas, ou seja, a deslocação da curva é assumida como sendo uma deslocação paralela e infinitesimal.

A aproximação linear da variação percentual da função-preço, face a uma variação da *yield to maturity*, é dada por

$$\frac{\Delta P}{P_0} \approx \frac{dP}{P_0} = -D_m(i)di. \quad (1.25)$$

A expressão (1.25) demonstra claramente que uma duração elevada significa que o investidor obterá um elevado benefício se houver uma descida nas taxas de juro, mas também terá uma perda elevada se o movimento for inverso. Para a variância, vem

$$\text{VAR}\left(\frac{dP}{P_0}\right) = D_m^2(i)\text{VAR}(di) \Leftrightarrow \sigma\left(\frac{dP_0}{P}\right) = D_m\sigma(di). \quad (1.26)$$

De (1.26) observa-se que o desvio padrão da variação percentual infinitesimal da função-preço é uma função linear do desvio padrão da variação infinitesimal da *yield to maturity*.

1.2.2 Propriedades da Duração de Macaulay

Grandville (2001) evidencia que a relação entre a taxa de cupão e a duração pode ser directamente observada pela interpretação da duração como centro de gravidade. Ou seja: um aumento da taxa de cupão irá aumentar o peso relativo de todos os cupões em relação ao último, devido ao facto de que o principal se mantém inalterado; logo, quanto maior a taxa de cupão menor a duração. Considerando a forma fechada de $D(i)$, a

relação inversa torna-se evidente. Dividindo (1.11) por M_T tem-se que $P_0/M_T = 1/i \left[(c/M_T) \left[1 - (1+i)^{-T} \right] + i(1+i)^{-T} \right]$, em que aplicando o logaritmo e derivando em ordem a i se obtém o simétrico da duração modificada. Assim, multiplicando o resultado por $-(1+i)$, vem, após simplificação,

$$D(i) = 1 + \frac{1}{i} + \frac{T(i - c/M_T) - (1+i)}{(c/M_T) \left[(1+i)^T - 1 \right] + i}. \quad (1.27)$$

Facilmente se constata que um aumento no valor do cupão reduz simultaneamente o valor do numerador e do denominador.

Mostra-se facilmente que a relação entre a *yield to maturity* e a duração é inversa, calculando a derivada da duração em ordem a i . Com $D(i) = P_0^{-1} \sum_{t=1}^T t \times CF_t (1+i)^{-t}$, vem

$$\frac{dD(i)}{di} = -(1+i)^{-1} \left[\frac{\sum_{t=1}^T t^2 CF_t (1+i)^{-t}}{P_0} - D^2 \right]. \quad (1.28)$$

O termo entre parênteses poderá ser interpretado como a dispersão média do tempo de pagamentos. Fazendo $w_t = CF_t (1+i)^{-t} / P_0$, conclui-se que $\sum_{t=1}^T w_t = 1$ e

$D(i) = \sum_{t=1}^T t \times w_t$, logo pode-se reescrever (1.28) da seguinte forma,

$$\frac{dD(i)}{di} = -(1+i)^{-1} \sum_{t=1}^T w_t (t - D(i))^2. \quad (1.29)$$

O termo entre parênteses é sempre positivo; logo, $dD(i)/di < 0$.

A relação entre a duração e maturidade poderá ser resumida em quatro resultados, alguns dos quais de demonstração imediata.

Resultado 1: Para obrigações de cupão-zero a duração é igual à maturidade.

Resultado 2: Para as obrigações com pagamentos de cupões tem-se que

$$\lim_{T \rightarrow \infty} D(i) = 1 + 1/i .$$

Resultado 3: Para obrigações cotadas acima do par, a relação entre a maturidade e a duração é directa até ao limite de $1 + 1/i$.

Resultado 4: Para obrigações cotadas abaixo do par, um aumento da maturidade provocará um aumento da duração superior a $1 + 1/i$, e após o aumento tenderá a decrescer à medida que a obrigação se aproxima da maturidade.

O resultado 1 é facilmente obtido se se considerar $c = 0$ em (1.27).

O resultado 2 é também obtido directamente através da expressão (1.27). O limite $T \rightarrow \infty$ em (1.27) resulta na indeterminação ∞/∞ que é facilmente resolvida aplicando a regra de L'Hôpital, pois o efeito exponencial do denominador da terceira parcela prevalece sobre o efeito linear do numerador.

Os resultados 3 e 4 são de análise mais complexa e dependem da relação entre o valor da taxa de cupão e a *yield to maturity*. Para uma análise mais formal veja-se G. Hawawini (1982).

1.2.3 Duração de uma carteira de obrigações

Sendo A o valor da carteira e N_j o número de obrigações em carteira de cada obrigação P_j , com $j = 1, 2, \dots, n$, então

$$A = \sum_{j=1}^n N_j P_j. \quad (1.30)$$

Derivando (1.30) em ordem a i , multiplicando a expressão por $-(1+i)/A$ e cada termo por P_j/P_j , obtém-se a duração da carteira $D_A(i)$,

$$D_A(i) = \sum_{j=1}^n \frac{N_j P_j}{A} D_j. \quad (1.31)$$

Com $X_j = \frac{N_j P_j}{A}$, então $\sum_{j=1}^n X_j = 1$ a expressão (1.31) fica reduzido a $\sum_{j=1}^n X_j D_j$.

Assim se vê que a duração de uma carteira de obrigações não é mais que a média ponderada da duração de cada obrigação, (onde o peso de cada título é dado pelo seu valor presente a dividir pelo valor total da carteira). É importante salientar que se considerou que a *yield to maturity* é a mesma para cada termo; caso esta hipótese não se verifique, então não é correcto somar e obter médias das durações. É necessário ter em atenção que se está a tratar de obrigações sem risco de crédito, pelo que o *spread* associado à EPTJ é nulo. No caso de se tratar de obrigações com risco de crédito não homogéneas, as diferenças nos *spreads* violam o pressuposto de (1.31), isto é, que os cash flows são descontados à mesma taxa.

1.2.4 A duração como instrumento de imunização de uma obrigação num horizonte temporal

Quando se detém uma obrigação, o conceito de duração é importante se se pretende pôr em prática medidas de imunização.

Imunização poderá ser definida como a estratégia de investimento que assegura que uma variação nas taxas de juro não afectará o valor da carteira.

Pela função-preço é claramente visível a relação inversa existente entre o valor presente de uma obrigação e a *yield to maturity*. No entanto, também se observa que o valor da obrigação tenderá para o seu valor nominal, independentemente de i .

Assim sendo, se o horizonte temporal do investidor (H) for igual à maturidade da obrigação (e tendo em conta que a obrigação gera cupões até à maturidade), então um aumento das taxas de juro significa que os cupões gerados serão reinvestidos a uma taxa superior, o que provocará um aumento da taxa de rendibilidade efectiva, r_H . Existe, portanto, um determinado horizonte temporal em que as variações nas taxas de reinvestimento dos cash flows serão anuladas pelas variações das cotações dos activos em carteira.

O investidor de uma obrigação estará imunizado em relação a um choque paralelo se o seu horizonte temporal for igual à duração.

Relembrando (1.20), com $VF = P(i)(1+i)^H$, vem

$$r_H = \left(\frac{P(i)(1+i)^H}{P_0} \right)^{\frac{1}{H}} - 1. \quad (1.32).$$

Minimizar r_H é equivalente a minimizar $P(i)(1+i)^H$. Assim,

$$\frac{d}{di} \left[P(i)(1+i)^H \right] \Big|_{i=i_0} = 0 \Leftrightarrow H = - \frac{(1+i_0)}{P(i_0)} \frac{dP(i)}{di} \Big|_{i=i_0} = D \quad (1.33)$$

Grandville (2001) mostra que a segunda derivada de (1.33) é sempre positiva; logo, com

$D = H$ obtém-se um mínimo para r_H e na ausência de qualquer choque $r_H = i_0$.

1.3 Convexidade

A convexidade (C) de uma função é dada pela taxa de variação da sua inclinação, pelo que para a função-preço vem

$$C = \frac{1}{P(i)} \frac{d^2 P(i)}{di^2}. \quad (1.34)$$

A convexidade permite melhorar a aproximação linear obtida através da duração modificada. Ou seja, pela expansão de Taylor de segunda ordem:

$$\frac{\Delta P}{P(i_0)} \approx -D_m (i - i_0) + \frac{1}{2} C (i - i_0)^2 = -D_m \Delta i + \frac{1}{2} C \Delta i^2. \quad (1.35)$$

No modelo discreto tem-se que

$$C = \frac{1}{P(i_0)(1+i)^2} \sum_{t=1}^T t(t+1) CF_t (1+i)^{-t}, \quad (1.36),$$

o que permite destacar as seguintes propriedades (de demonstração imediata):

Propriedade 1: A convexidade é sempre positiva.

Propriedade 2: A convexidade depende da dispersão dos cash flows e da duração.

Propriedade 3: A dimensão da convexidade é dada em t^2 .

A primeira propriedade é de extrema importância e diz que a correcção de segunda ordem é sempre positiva.

Na Figura 1.1 estão representados os preços de duas obrigações, A e B , apresentando B uma maior convexidade.

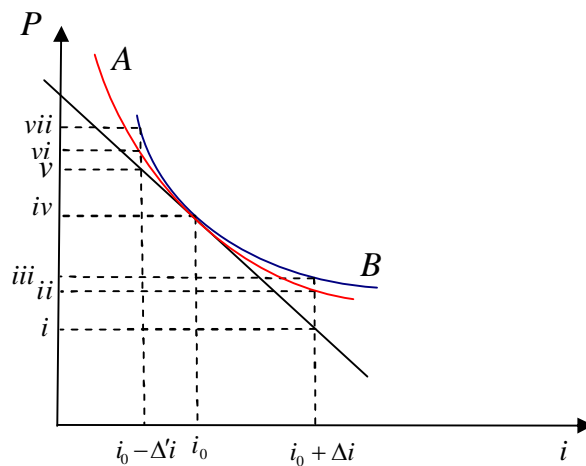


Figura 1.1 - Aproximação linear e quadrática do valor de uma obrigação

- No ponto (i_0, iv) tem-se a situação inicial, em que o valor da obrigação A iguala o valor da obrigação B .
- Mediante um choque paralelo da taxa de juro de magnitude Δi , o valor da obrigação A decresce para ii , enquanto o de B decresce para iii , com $iii - ii > 0$, uma vez que B tem maior convexidade do que A .
- Mediante um choque paralelo da taxa de juro de magnitude $-\Delta i$, o valor da obrigação A aumenta para vi , enquanto o de B aumenta para vii , com $vii - vi > 0$, pela mesma razão.
- Note-se que $ii - i$ e $iii - i$ representam os desvios de primeira ordem para as obrigações A e B , respectivamente, face a um choque paralelo de magnitude Δi , e que ambas as diferenças são maiores que zero. Isto significa que a aproximação de primeira ordem (uma vez que a segunda derivada da função-preço é sempre positiva) sobrestima o decréscimo de valor de ambas as obrigações.
- Note-se também que $vi - v$ e $vii - v$ representam o erro de primeira ordem para as obrigações A e B , respectivamente, face a um choque paralelo de magnitude $-\Delta i$, e que ambas as diferenças são maiores que zero. Isto significa que a aproximação de primeira ordem (uma vez que a segunda derivada da obrigação preço é sempre

positiva) subestima o aumento de valor de ambas as obrigações num contexto de choques paralelos.

A principal característica da convexidade é que **quanto maior a convexidade de uma determinada obrigação, menor será a perda de valor, face a um aumento paralelo da taxa de juro, e maior será o ganho mediante uma descida da mesma.** Consequentemente, a aproximação de primeira ordem (dado que a convexidade da recta é zero) gera sempre um cenário mais “conservador” do que o obtido através de um *stress-test*, sendo o erro de primeira ordem tanto maior quanto mais convexa for a função-preço da obrigação.

O facto da convexidade depender da dispersão dos pagamentos e da duração de Macaulay demonstra-se, tendo em conta que

$$\frac{dD}{di} = - \left[\frac{P - (1+i) \frac{dP}{di}}{P^2} \right] \frac{dP}{di} - \frac{1+i}{P} \frac{d^2 P}{di^2}. \quad (1.37)$$

Igualando (1.29) a (1.37) obtém-se, após alguma manipulação algébrica,

$$C = \frac{1}{(1+i)^2} \left[\sum_{t=1}^T w_t (t - D(i))^2 + D(D+1) \right]. \quad (1.38)$$

De (1.38) conclui-se que a relação entre convexidade e duração é bastante forte. Além do mais, para uma determinada duração, uma obrigação ou uma carteira de obrigações será tanta mais convexa quanto maior for a dispersão dos seus cash flows.

Quanto à convexidade de uma carteira de obrigações, C_A , é dada pela seguinte expressão

$$C_A = \sum_{j=1}^n X_j C_j. \quad (1.39)$$

O que quer dizer que a convexidade da carteira é simplesmente uma média ponderada das convexidades individuais, onde os pesos X_j representam a proporção do valor de cada obrigação na carteira. Mantém-se a ressalva de que não é correcto calcular a convexidade de uma carteira de obrigações pela média ponderada, quando as obrigações apresentam diferentes *yields to maturity*.

A convexidade desempenha um papel crucial na imunização de uma carteira contendo activos e passivos.

1.4 Imunização no contexto de activos e passivos - Condições de Redington

A imunização de uma carteira contendo activos e passivos é de particular relevância para as seguradoras do ramo vida, uma vez que através de modelos actuariais projectam os cash flows das suas responsabilidades futuras (normalmente de longo prazo e, portanto, mais expostas ao risco de taxa de juro) e investem grande parte das suas provisões técnicas no mercado obrigacionista.

Sendo L_t o pagamento futuro (em t) das responsabilidades de uma determinada empresa, o valor presente do passivo, VP_L , é dado por

$$VP_L = \sum_{t=1}^T L_t (1+i)^{-t}. \quad (1.40)$$

Do mesmo modo, se estabelece o valor presente dos recebimentos futuros A_t (no momento t), seja

$$VP_A = \sum_{t=1}^T A_t (1+i)^{-t}. \quad (1.41)$$

Logo, o valor do balanço é

$$\Pi = VP_A - VP_L. \quad (1.42)$$

Para imunizar o balanço, face a choques paralelos da EPTJ, Redington (1952) estabeleceu as seguintes condições:

- O valor presente do activo deverá igualar o valor presente do passivo, isto é

$$VP_A = VP_L.$$

- O activo e passivo deverão ter a mesma duração, isto é $D_A = D_L$.
- A convexidade do activo deverá ser superior à convexidade do passivo, ou seja,

$$C_A > C_L.$$

Estas condições são o resultado directo do objectivo de se evitar que variações em i tenham um efeito negativo no valor do balanço. Deste modo, vem

$$\frac{d\Pi}{di} = \frac{d}{di} \left[\sum_{t=1}^T (VP_A \times t - VP_L \times t) (1+i)^{-t} \right]. \quad (1.43)$$

Multiplicando e dividindo (1.43) por VP_A , e tendo em conta que $VP_A = VP_L$, tem-se

$$\frac{d\Pi}{di} = \frac{VP_A}{1+i} [D_L - D_A]. \quad (1.44)$$

Chega-se assim à condição de primeira ordem: $VP_A = VP_L$ e $D_A = D_L$.

A condição de segunda ordem, $C_A > C_L$, justifica-se pela necessidade de se manter o balanço positivo face a variações de i , o que acontecerá se Π for uma função convexa. Sendo a convexidade da soma igual à soma das convexidades, tal acontecerá se $d^2VP_A/di > d^2VP_L/di$, uma vez que ambos os valores presentes são iguais. Tendo em conta que $D_A = D_L$, é necessário ter uma carteira de activos cuja dispersão de cash

flows do activos seja superior à dispersão dos cash flows do passivo, para que seja garantida a condição de segunda ordem.

1.5 Estratégias activas e convexidade

Enquanto a imunização tem como objectivo minimizar a volatilidade do valor da carteira e, por conseguinte, é uma estratégia de gestão passiva, as estratégias activas de que se falará neste ponto têm como objectivo maximizar a rendibilidade da carteira.

1.5.1 Estratégia de antecipação

Se houver uma previsão de descida de i , a estratégia a adoptar é a aquisição de obrigações de duração elevada. A convexidade potencia o ganho, se a previsão se verificar, e minimiza as perdas no caso de o movimento ser inverso. Logo, se no mercado houver duas obrigações com a mesma cotação e a mesma duração, em que na primeira se tem cupões periódicos e na segunda apenas existe o reembolso do principal, por exemplo, a primeira terá sempre uma maior convexidade (a dispersão de cash flows de uma obrigação de cupão zero é zero) e portanto será preferível à segunda, num contexto de choques paralelos.

1.5.2 Estratégia Barbell-Bullet

A estratégia de Barbell-Bullet, na sua forma mais simples, consiste em tomar uma posição longa numa carteira (Barbell) constituída por duas obrigações, uma de maturidade reduzida e outra de maturidade elevada, e uma posição curta numa

obrigação (Bullet) de duração média, de forma a igualar o valor presente e a duração de ambas. É natural que a carteira Barbell exiba uma maior convexidade, devido à maior dispersão dos seus cash flows. Assim, qualquer que seja a deslocação paralela da EPTJ horizontal, o investidor obterá sempre um ganho, pois estarão cumpridas as condições de Redington.

A construção de uma tal carteira faz-se como a seguir se descreve. Admita-se que:

P_C e D_C são o preço e a duração da obrigação de maturidade curta, respectivamente.

P_M e D_M são o preço e a duração da obrigação de maturidade média.

P_L e D_L são o preço e a duração da obrigação de maturidade longa.

N_C , N_M e N_L representam respectivamente o número de obrigações de maturidade curta, média e longa.

Fixando-se $N_M = 1$, tem-se

$$N_C P_C + N_L P_L = P_M \quad (1.45)$$

Ou seja, o valor da carteira Barbell terá de ser igual ao valor da carteira Bullet e

$$\frac{N_C P_C}{P_M} D_C + \frac{N_L P_L}{P_M} D_L = D_M, \quad (1.46)$$

isto é, a duração da carteira Barbell terá de ser igual à duração da carteira Bullet.

Impondo a restrição $N_L P_L / P_M = X_L = 1 - N_C P_C / P_M = 1 - X_C$ a solução de (1.46) é dada por

$$N_C = \frac{P_M}{P_C} \left(\frac{D_L - D_M}{D_L - D_C} \right) \quad e \quad N_L = \frac{P_M}{P_L} \left(\frac{D_M - D_C}{D_L - D_C} \right). \quad (1.47)$$

Pode então concluir-se que a estratégia para várias obrigações será

$$Max\{C_{\Pi}\} = Max\left\{\sum_{j=1}^n X_j C_j\right\}, \quad (1.48)$$

sujeito a $\sum_{j=1}^n X_j = 1$, $X_j \geq 0$ e $\sum_{j=1}^n X_j D_j = D_{\text{Bullet}}$.

Mostra-se que a solução de (1.48) é obtida apenas com duas obrigações, uma de duração máxima e outra de duração mínima, que poderá ser financiada por uma obrigação de duração média - estratégia Barbell-Bullet. No entanto, questões de liquidez nos mercados e a necessidade de actualização constante da carteira, devido ao activo de duração reduzida, obrigam muitas vezes a um compromisso entre a optimização e a praticabilidade da estratégia.

Estas ilustrações mostram que, para além de ser uma forma de melhorar as estimativas obtidas pela duração, a convexidade desempenha um papel crucial tanto em estratégias passivas (imunização) como activas. O que leva a crer que duas obrigações com o mesmo nível de risco e o mesmo valor presente não deviam ter a mesma cotação se uma fosse mais convexa que outra, de modo a evitar a existência de oportunidades de arbitragem. Ou seja, a convexidade deveria reflectir-se no valor de mercado das obrigações e, como tal, a situação inicial da Figura 1.1 não poderia ser uma situação de equilíbrio.

Surpreendentemente, não é isso que se observa. Para além dos mercados não serem perfeitamente líquidos, e haver custos de transacção, a questão reside nos pressupostos do modelo, nomeadamente nos choques paralelos. No entanto, Grandville (2001) admite a existência de um preço a pagar pela convexidade, embora para o mesmo nível de risco o preço de uma obrigação deva ser função apenas da EPTJ. Leiwbowitz (1986) estimou que o coeficiente de correlação entre o índice Salomon Brothers Board e a Treasury yield a 10 anos entre Janeiro de 1980 e Novembro de 1985 tenha sido de -0.98.

1.6 Duração de Fisher e Weil

Fisher e Weil (1971) generalizam a EPTJ horizontal na duração de Macaulay para uma estrutura inicial que poderá assumir qualquer forma, substituindo a *yield to maturity* pelas taxas de juro à vista. Embora não haja qualquer restrição sobre a configuração da EPTJ inicial, a restrição de choques paralelos mantém-se. Em condições normais de mercado, a taxa de juro à vista para obrigações sem risco de crédito aumenta com a maturidade, uma vez que se exige uma maior rendibilidade para períodos mais longos (devido, principalmente, à preferência de liquidez e à aversão ao risco de taxa de juro). De forma a simplificar os cálculos, Fisher e Weil derivam a duração em tempo contínuo.

1.6.1 Definição

A função-preço $P(\vec{i})$ é definida por

$$P(\vec{i}) = \int_0^T c(t) e^{-i(0,t)t} dt, \quad (1.49)$$

onde $c(t)$ é o cash flow gerado continuamente em t e $i(0,t)$ é uma função contínua das taxas de juro à vista, com

$$i(0,t) \times t = \int_0^t i(z) dz, \quad (1.50)$$

sendo $i(z)$ a taxa de juro instantânea contratada no presente, a iniciar em z , por um período (maturidade) infinitesimal.

Mediante um choque paralelo de magnitude α , a “nova” função-preço é definida por

$$P(\vec{i} + \alpha) = \int_0^T c(t) e^{-[i(0,t) + \alpha]t} dt. \quad (1.51)$$

Isto é, dada a estrutura inicial, a função-preço continua a ser função de uma só variável, α . Deste modo, a duração de Fisher e Weil é

$$D(\vec{i} + \alpha) = -\frac{1}{P(\vec{i} + \alpha)} \frac{dP(\vec{i} + \alpha)}{d\alpha} = \frac{1}{P(\vec{i} + \alpha)} \int_0^T t \times c(t) e^{-[i(0,t) + \alpha]t} dt. \quad (1.52)$$

Com $\alpha = 0$, tem-se que a duração no momento zero é

$$D = -\frac{1}{P(\vec{i})} \frac{dP(\vec{i})}{d\alpha} = \frac{1}{P(\vec{i})} \int_0^T t \times c(t) e^{-[i(0,t)]t} dt. \quad (1.53)$$

Note-se que, ao contrário do modelo discreto, no modelo contínuo não se tem a distinção entre duração de Macaulay e a duração modificada, pois neste caso o tempo médio de recebimentos é igual à derivada da função-preço em ordem a α e a duração de uma obrigação de cupão zero é igual a T .

Para a convexidade, vem

$$C(\vec{i} + \alpha) = \frac{1}{P(\vec{i} + \alpha)} \frac{d^2 P(\vec{i} + \alpha)}{d\alpha^2} = \frac{1}{P(\vec{i} + \alpha)} \int_0^T t^2 \times c(t) e^{-[i(0,t) + \alpha]t} dt. \quad (1.54)$$

Note-se que a convexidade para uma obrigação de cupão zero é T^2 e não $T^2 + T$. Daqui resulta que, nesse caso, a convexidade é igual ao quadrado da duração.

1.6.2 Imunização no horizonte temporal no modelo de Fisher e Weil

As propriedades da convexidade e imunização do modelo discreto de Macaulay podem ser aplicadas ao modelo de Fisher e Weil, embora seja necessário fazer as respectivas adaptações e ter-se alguma cautela na interpretação directa dos resultados. Para tal, considere-se a imunização no horizonte temporal de uma obrigação ou carteira de

obrigações, onde logo após a aquisição do título se verifica um choque paralelo de magnitude α .

O valor futuro é dado por

$$VF(\vec{i} + \alpha) = P(\vec{i} + \alpha) \cdot e^{[i(0,H) + \alpha]H}. \quad (1.55)$$

Derivando o logaritmo de (1.55), e igualando a zero, resulta na condição de primeira ordem

$$\left. \frac{d \ln VF(\vec{i} + \alpha)}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = \left. \frac{d \ln P(\vec{i} + \alpha)}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} + H = 0 \Leftrightarrow D(\vec{i}) = H. \quad (1.56)$$

Para a condição de segunda ordem, vem

$$\frac{d^2 \ln VF(\vec{i} + \alpha)}{d\alpha^2} = \frac{d}{d\alpha} \left[\frac{1}{P(\vec{i} + \alpha)} \frac{dP(\vec{i} + \alpha)}{d\alpha} \right] = - \frac{dD(\vec{i} + \alpha)}{d\alpha}. \quad (1.57)$$

Como o objectivo é avaliar $dD(\vec{i} + \alpha)/d\alpha$, vai obter-se

$$\begin{aligned} \frac{dD(\vec{i} + \alpha)}{d\alpha} &= \frac{d}{d\alpha} \left[\frac{1}{P(\vec{i} + \alpha)} \int_0^T t \times c(t) e^{-[i(0,t) + \alpha]t} dt \right] = \\ &= - \left[\frac{\int_0^T t^2 \times c(t) e^{-[i(0,t) + \alpha]t} dt}{P(\vec{i} + \alpha)} + \frac{\int_0^T t \times c(t) e^{-[i(0,t) + \alpha]t} dt}{P(\vec{i} + \alpha)} \frac{1}{P(\vec{i} + \alpha)} \frac{dP(\vec{i} + \alpha)}{d\alpha} \right]. \end{aligned} \quad (1.58)$$

Convém fazer nota que o segundo membro da igualdade (1.58) é igual a $D(\vec{i} + \alpha)^2 - C(\vec{i} + \alpha)$. O resultado é generalizável para a grande maioria de modelos de duração, veja-se (1.28), uma vez que, se se definir $P' = -PD$, e se derivar a expressão, se obtém $P'' = -P'D - PD'$. Dividindo o resultado por P e resolvendo em ordem a D' , obtém-se $D' = D^2 - C$, com $C = P''/P$.

Simplificando a notação com $w(t) = c(t) e^{-[i(0,t) + \alpha]t} / P(\vec{i} + \alpha)$ e $\int_0^T w(t) dt = 1$, fica

$$\frac{dD(\vec{i} + \alpha)}{d\alpha} = - \int_0^T w(t) \left[t - D(\vec{i} + \alpha) \right]^2 dt. \quad (1.59)$$

A expressão (1.59) representa a dispersão/variância dos cash flows no tempo; uma vez que se conclui ser $d^2 \ln VF(\vec{i} + \alpha) / d\alpha^2 \geq 0$, confirmando que a condição de primeira ordem fornece um mínimo. Note-se que a expressão (1.59) é zero para obrigações de cupão zero, tal como no modelo discreto, uma vez que t será igual a D . Em termos intuitivos faz sentido, uma vez que fixando o horizonte temporal na maturidade de uma obrigação de cupão zero (sem risco de crédito) a rendibilidade obtida é independente de qualquer choque que possa haver na EPTJ. Para obrigações com pagamentos de cupões é necessário ter em atenção que no primeiro instante se considera $\alpha = 0$, pelo que a condição de imunização para choques paralelos só se mantém por um breve período (logo após a aquisição do título).

1.6.3 Estimativas da duração e convexidade

Independentemente de se considerar capitalizações contínuas ou discretas, Reitano (1992) propõe que a duração e convexidade no modelo de Fisher e Weil sejam calculadas tendo em conta a derivada central, dado que as funções não são perfeitamente simétricas. Recordando que a derivada central da função $f(x)$ é $f'_c(x) = \lim_{h \rightarrow 0} (f(x+h) - f(x-h)) / 2h$, vem directamente que

$$D(i) = - \left(\frac{P(\vec{i} + \alpha) - P(\vec{i} - \alpha)}{2\alpha P(\vec{i})} \right). \quad (1.60)$$

O autor considera que cerca de 1 a 5 pontos base para α é suficiente. Tendo em conta a segunda derivada central obtém-se a estimativa para a convexidade:

$$C(\vec{i}) = \frac{P(\vec{i} + \alpha^*) + P(\vec{i} - \alpha^*) - 2P(\vec{i})}{(\alpha^*)^2 P(\vec{i})}, \quad (1.61)$$

em que $\alpha^* = 2\alpha$.

1.7 Limitações da duração nos modelos de Macaulay e Fisher e Weil

1.7.1 Limitações no modelo de Macaulay

Para além da duração de Macaulay assumir uma EPTJ horizontal (definida pela *yield to maturity*), o que por si só limita os choques a deslocações paralelas e contraria a teoria económica, as condições de Redington, isto é, as propriedades da convexidade, são claramente inconsistentes com o equilíbrio de mercado.

Reitano (1992) evidencia ainda outras duas limitações no modelo discreto.

A primeira prende-se com a derivação da *yield to maturity*, em virtude da forma funcional da função-preço ser um polinómio (no modelo discreto) e, consequentemente, a solução não ser única.

A segunda deriva do facto de um deslocamento paralelo de um determinado montante numa EPTJ não ser equivalente ao mesmo deslocamento aplicado à *yield to maturity*. Para este efeito, o autor apresenta um exemplo numérico onde deriva a *yield to maturity* para que o valor presente dos cash flows futuros iguale o valor presente obtido através de uma EPTJ hipotética, não horizontal, obtendo assim a duração modificada clássica. De seguida, aplica um choque paralelo à EPTJ não horizontal e aplica a mesma deslocação à *yield to maturity* e conclui que a duração modificada clássica gera uma pobre estimativa para o choque em questão. O problema reside na diferença de unidades entre a *yield to maturity* e a EPTJ, pois se se estimar a nova *yield to maturity* em função da nova EPTJ, esta, obviamente, não coincidirá com a *yield to maturity* anterior adicionada da deslocação paralela proposta. No segundo capítulo apresenta-se a derivação de choques equivalentes na *yield to maturity*, proposta por Reitano.

1.7.2 Limitações da duração de Fisher e Weil

Embora não haja limitações quanto à forma da EPTJ inicial, a hipótese de que a curva se desloca apenas de forma paralela mantém-se. O problema das unidades é factor a ter em conta quando os choques não são paralelos. Reitano (1992) propõe a substituição de um determinado choque não paralelo por um choque paralelo equivalente, o que será abordado no capítulo seguinte. Mostra ainda que para determinadas deslocações a duração de Fisher e Weil, tal como a duração modificada clássica, poderá nem sequer captar o sentido certo da variação de um determinado balanço, o que tem implicações directas nas condições de Redington e nas estratégias activas do tipo Barbell-Bullet.

Fabozzi (1999) exemplifica numericamente que para choques não paralelos o resultado da estratégia Barbell-Bullet para um dado horizonte temporal pode produzir efeitos contrários aos esperados. Ou seja, a carteira Bullet poderá, em certos cenários, ter uma performance superior à carteira Barbell. Note-se que o risco de reinvestimento no curto prazo é inferior na carteira Bullet. Embora a carteira Barbell liberte um principal pronto a ser reinvestido no curto prazo, este mantém cash flows até ao final do horizonte temporal que não poderão ser reinvestidos às taxas superiores. Na situação inversa, isto é, num achatamento da EPTJ, a carteira Barbell tem obviamente uma performance superior.

Grandville (2001) expõe a dificuldade de mensuração da sensibilidade de uma obrigação, face a deslocações não paralelas, substituindo o parâmetro α da função-preço de Fisher e Weil por $\alpha \times \eta(0, t)$, que representa uma variação na EPTJ ocorrida logo após a aquisição de uma obrigação. Deste modo, a função-preço é dada por

$$P\left(\tilde{i} + \alpha \eta(0, t)\right) = \int_0^T c(t) e^{-[i(0, t) + \alpha \eta(0, t)]t} dt. \quad (1.62)$$

Consequentemente, (1.62) é um caso particular de (1.51), com $\eta(0,t)=1$. Para que a função-preço dependa apenas de α , $\eta(0,t)$ é considerado fixo, mas desconhecido do investidor.

Assim, tem-se que

$$D = -\frac{1}{P} \frac{dP}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} = \frac{1}{P} \int_0^T t \times \eta(0,t) c(t) e^{-i(0,t)t} dt. \quad (1.63)$$

Da mesma forma que se mostrou que a condição de primeira ordem de Fisher e Weil para a imunização de uma obrigação no horizonte temporal é dada por $D=H$, assim se mostra que para a função-preço (1.62) a condição de primeira ordem é dada por

$$H = -\frac{1}{\eta(0,H)} \frac{d \ln P}{dP} \Big|_{\alpha=0}. \quad (1.64)$$

A dificuldade de imunização resulta no facto de $\eta(0,t)$ ser desconhecida.

Em termos empíricos, a duração de Fisher e Weil não se tem mostrado muito superior à duração de Macaulay/modificada. Para Grandville (2001) p. 218: *“The reason for this is twofold: first, the term structure is relatively flat where it counts most (that is, for long maturities), second, it’s quite possible that in the long run the nonparallel displacements have a tendency to compensate each other in their effects, since over long periods the shape of the structure generally increases smoothly”*.

Para Wu (2000), a duração de Macaulay (nas obrigações de cupão zero) tem a qualidade das taxas internas de rendibilidade (*yield to maturity*) serem específicas para cada maturidade e de capturarem bastante informação ao longo da curva de rendimentos, uma vez que traduzem as rendibilidades médias dos cash flows.

Capítulo 2 - Risco de taxa de juro num contexto de choques não paralelos

No capítulo anterior foram analisadas a duração e a convexidade como medidas de risco de taxa de juro para obrigações de cash flows certos, partindo do pressuposto que a EPTJ apenas se deslocava de forma paralela. No entanto, este tipo de movimentação raramente é observado na realidade, veja-se Chambers (1996). O facto de se ignorar variações não paralelas poderá aumentar consideravelmente o risco do processo estocástico, isto é, o risco da má especificação do modelo face ao comportamento aleatório das taxas de juro. Reitano (1992) exemplifica numericamente que os modelos apresentados anteriormente podem não só subestimar consideravelmente a sensibilidade de uma carteira face a choques não paralelos como até, em certas situações, nem sequer captar o sentido da variação da mesma.

Neste capítulo, apresentam-se novas medidas de risco de taxa de juro em que a restrição de choques paralelos é relaxada, de forma a haver uma maior consistência com a realidade empírica.

Os dois primeiros modelos apresentados são o M-Absoluto e o M-Quadrado. Ambos têm o objectivo de imunizar a carteira para um determinado horizonte temporal, e definem um limite inferior para a diferença entre o valor da carteira em H , pressupondo primeiro que as taxas futuras se mantêm inalteradas (valor alvo) e depois que se observa um choque arbitrário de magnitude $\Delta f(t)$, $0 \leq t \leq H$. O modelo do M-Quadrado permite ainda obter uma nova perspectiva sobre as propriedades da convexidade analisadas anteriormente.

Apresentam-se igualmente o modelo de vector de durações e o modelo de vector de durações generalizado. Derivando durações de ordens superiores estes modelos

permitem captar os efeitos na função-preço resultantes de variações na altura, inclinação, curvatura, taxa de variação da curvatura e outros parâmetros de ordem superior da função representativa da EPTJ.

Segue-se o modelo de duração e convexidade direccional de Reitano (1992). Neste modelo, uma vez definida a norma do vector direccional, isto é, a magnitude do choque, a sensibilidade da função-preço depende do sentido/direcção em que as taxas se movimentam para as diversas maturidades. Aplicando directamente a desigualdade de Cauchy-Schwarz e a desigualdade quadrática definem-se os limites superior e inferior para os parâmetros de risco duração e convexidade direccionais, demonstrando que os extremos podem apresentar sinais contrários, o que tem algumas implicações.

Reitano propõe ainda que a função-preço seja expressa como uma função multi-variada, dando origem ao modelo de duração e convexidade parcial. Através deste mostra-se como se podem aplicar a duração de Macaulay/modificada e a duração de Fisher e Weil, num ambiente em que as taxas não se movimentam de forma paralela.

O modelo parcial contribui ainda com duas medidas que podem ser utilizadas com uma *proxy* de risco de taxa de juro: a alavanca duracional e o multiplicador duracional.

O capítulo termina com o modelo denominado *key rate*, derivado por Ho (1992). A duração e a convexidade *key rate* são equivalentes à duração e convexidade parcial de Reitano, mas Ho propõe, de modo a minimizar o número de variáveis do modelo, 11 maturidades distintas para as taxas de juro obtendo as restantes por interpolação linear destas.

Os modelos apresentados (com excepção do M-Absoluto), ao redefinirem as propriedades da convexidade, ajudam a explicar a situação de desequilíbrio encontrada nas condições de Redington e os riscos da estratégia Barbell-Bullet.

2.1 M-Absoluto e M-Quadrado

2.1.1 M-Absoluto

O modelo é construído num contexto de capitalizações contínuas das taxas futuras de cash flows discretos. Tendo em conta (1.50) e que as variáveis mantêm o seu significado anterior, define-se sucessivamente

$$P_0 = \sum_{t=1}^T CF_t e^{-\int_0^t f(z) dz} ; \quad w_t = \frac{CF_t e^{-\int_0^t f(z) dz}}{P_0} \quad e \quad D = \sum_{t=1}^T t \times w_t. \quad (2.1)$$

Nawalkha e Chambers (1996) derivam o modelo M-Absoluto M^A , que tem como objectivo imunizar uma carteira de cash flows certos para um dado horizonte temporal H , admitindo choques não paralelos. Deste modo, o modelo define um limite inferior para a diferença entre o valor da carteira em H pressupondo que as taxas futuras (*forward rates*) se mantêm inalteradas, representado por P_H (também definido como o valor alvo), e o valor da carteira em H efectivamente realizado, P_H^A , que inclui, como é evidente, todas as variações nas taxas futuras (representadas por $\Delta f(t)$, $0 \leq t \leq H$).

O M^A é obtido pela média ponderada das distâncias (tempo) absolutas entre os cash flows e o horizonte temporal, em que o peso é dado pelo valor presente de cada cash flow sobre o valor presente da obrigação, ou seja,

$$M^A = \sum_{t=1}^T |t - H| \times w_t. \quad (2.2)$$

Minimizar o M-Absoluto é equivalente a minimizar a diferença entre o valor futuro da carteira efectivamente realizado e o valor futuro da carteira alvo, ou seja, minimizar

$\Delta P_H = P_H^\Delta - P_H$. Contrariamente à duração, este é específico para cada horizonte temporal. No caso em que $H = 0$, M^A reduz-se à duração (de Fisher e Weil).

Tendo em conta que

$$P_H = P_0 \times e^{\int_0^H f(z) dz} = \sum_{t=1}^T CF_t \times e^{\int_0^t f(z) dz} \quad (2.3)$$

e

$$P_H^\Delta = P_0 \times e^{\int_0^H [f(z) + \Delta f(z)] dz} = \sum_{t=1}^T CF_t \times e^{\int_0^t [f(z) + \Delta f(z)] dz}, \quad (2.4)$$

define-se o seguinte limite inferior

$$\frac{\Delta P_H}{P_H} \geq -K_3 \times M^A = -K_3 \sum_{t=1}^T |t - H| \times w_t, \quad (2.5)$$

onde K_3 representa o desvio absoluto máximo entre a EPTJ inicial e a nova EPTJ.

Em geral, o parâmetro K_3 depende do tipo de choques na altura, inclinação, curvatura e outros parâmetros relevantes da EPTJ. Seleccionando uma carteira com cash flows concentrados à volta do horizonte temporal, reduz-se o risco de taxa de juro. Ou seja, a aplicação do M-Absoluto não elimina por completo o risco, a não ser na situação trivial em que $t = H$, para todo o $t \geq 0$. O modelo de duração de Fisher e Weil elimina o risco, quando $D = H$, mas apenas se os choques forem paralelos e infinitesimais. Portanto, a escolha entre um modelo ou outro dependerá do tipo de choques esperados.

A desigualdade em (2.5) mostra-se facilmente tendo em conta (2.3) e (2.4), pois

$$\Delta P_H = P_H^\Delta - P_H = \sum_{t=1}^T CF_t \times e^{\int_0^t f(z) dz} \left[e^{\int_t^H \Delta f(z) dz} - 1 \right]. \quad (2.6)$$

Dividindo (2.6) por P_H tem-se

$$\frac{\Delta P_H}{P_H} = \frac{1}{P_0} \sum_{t=1}^T C F_t \times e^{-\int_0^t f(z) dz} \left[e^{\int_t^H \Delta f(z) d(z)} - 1 \right]. \quad (2.7)$$

Para se obter (2.5) consideram-se dois casos.

Caso 1: $H \geq t$.

Define-se a constante K_1 , tal que $K_1 \leq \Delta f(t)$, para todo o $t \geq 0$. Por conseguinte, é imediato que

$$\int_t^H \Delta f(z) dz \geq K_1 |H - t|. \quad (2.8)$$

Caso 2: $H \leq t$.

Define-se a constante K_2 , tal que $K_2 \geq \Delta f(t)$, para todo o $t \geq 0$. É também imediato que

$$\int_H^t \Delta f(z) dz = -\int_t^H \Delta f(z) dz \leq K_2 (t - H). \quad (2.9)$$

De (2.9) resulta directamente que

$$\int_t^H \Delta f(z) dz \geq -K_2 |H - t|. \quad (2.10)$$

Combinando (2.8) e (2.10), vem

$$\int_t^H \Delta f(z) dz \geq |H - t| \times \text{Min}[K_1, -K_2]. \quad (2.11)$$

Uma vez que $K_1 \leq K_2$, então, $-\text{Min}[K_1, -K_2] = \text{Max}[|K_1|, |K_2|] = K_3$. Recordando que

$e^x \geq 1 + x$, vem

$$e^{\int_t^H \Delta f(z) d(z)} \geq 1 - K_3 |H - t|. \quad (2.12)$$

Partindo do pressuposto que não é permitido a venda a descoberto, isto é, que $CF_t \geq 0$, para todo o $t \geq 0$, e substituindo (2.12) em (2.7), obtém-se o limite inferior para o valor da carteira de obrigações em H dado por (2.5).

Para se aplicar o M-Absoluto é necessário dispor de uma função contínua e diferenciável representativa da EPTJ. Partindo das taxas de juro à vista obtém-se directamente a estrutura das taxas futuras. Assumindo, em particular, uma forma polinomial para as taxas de juro à vista tem-se

$$i(0, t) = A_0 + A_1 \times t + A_2 \times t^2 + A_3 \times t^3 + \dots \quad (2.13)$$

Nawalkha e Chambers afirmam que, embora seja necessário cerca de 5 ou 6 termos no lado direito da equação (2.13) para se capturar adequadamente a forma da EPTJ, os parâmetros A_0 , A_1 , A_2 e A_3 são os mais significativos.

Aplicando um choque não paralelo e não infinitesimal, $\Delta i(0, t)$, a nova EPTJ é definida por $i(0, t)^\Delta = i(0, t) + \Delta i(0, t)$, ou seja,

$$i(0, t)^\Delta = (A_0 + \Delta A_0) + (A_1 + \Delta A_1) \times t + (A_2 + \Delta A_2) \times t^2 + (A_3 + \Delta A_3) \times t^3 + \dots \quad (2.14)$$

onde:

ΔA_0 representa um choque na altura (paralelo) da EPTJ;

ΔA_1 representa um choque na inclinação da EPTJ;

ΔA_2 representa um choque na curvatura da EPTJ;

ΔA_3 representa um choque na taxa de variação da curvatura da EPTJ.

De (1.50) tem-se que

$$f(t) = t \times \frac{\partial i(0, t)}{\partial t} + i(0, t). \quad (2.15)$$

Tendo em conta (2.13) e (2.15) obtém-se a forma polinomial das taxas futuras,

$$f(t) = A_0 + 2A_1 \times t + 3A_2 \times t^2 + 4A_3 \times t^3 + \dots \quad (2.16)$$

Apesar da EPTJ obtida através das taxas de juro à vista e a EPTJ obtida com taxas de juro instantâneas futuras apresentarem a mesma altura, a segunda apresenta o dobro da inclinação, o triplo da curvatura e o quádruplo da taxa de variação da curvatura e assim por diante. O que torna $f(t)$ mais volátil do que $i(0,t)$. Estatisticamente, faz sentido, uma vez que $i(0,t)$ é uma média de taxas futuras. A função (2.16) é uma função facilmente integrável, o que torna a forma polinomial de aplicação bastante simples.

Como se referiu, a escolha de se imunizar a carteira recorrendo à duração ou ao M-Absoluto é determinada pelo tipo de choques esperados. Se os choques forem predominantemente sobre A_0 , a duração permitirá obter melhores resultados, mas se os choques forem significativos nos restantes parâmetros, a performance do M-Absoluto será superior.

Como na prática é improvável ter-se uma carteira com todos os cash flows a coincidir com o horizonte temporal H , é necessário escolher, dentro das possibilidades viáveis, uma carteira com o menor M-Absoluto possível. Assim, de forma a implementar a estratégia, estabelece-se a seguinte função objectivo:

$$\text{Min} \left[\sum_{j=1}^n p_j \times M_j^A \right] \quad (2.17)$$

$$\text{s.a: } \sum_{j=1}^n p_j = 1$$

$$p_j \geq 0, \quad j=1,2,\dots,n.$$

Para que os resultados da aplicação do M-Absoluto sejam comparáveis à estratégia da duração, iguala-se a duração da carteira ao horizonte temporal. No entanto, existem

infinitas combinações possíveis num conjunto finito de obrigações, capazes de satisfazer a restrição $D = H$. Nawalkha e Chambers (1996) sugerem, de modo a definir uma solução única, o seguinte problema de minimização,

$$\begin{aligned} & \text{Min} \left[\sum_{j=1}^n p_j^2 \right] \\ & \text{s.a: } \sum_{j=1}^n p_j D_j = H, \\ & \sum_{j=1}^n p_j = 1 \\ & p_j \geq 0, \quad j=1,2,\dots,n. \end{aligned} \tag{2.18}$$

A função quadrática escolhida para a função objectivo tem como propósito a diversificação do investimento nas n obrigações que constituem a carteira, pois $0 \leq p \leq 1$.

2.1.2 M-Quadrado

Fong e Vasicek (1983) apresentam uma medida de risco denominada M-Quadrado, M^2 . Tal como no M-Absoluto, o modelo define um limite inferior para a diferença $\Delta P_H = P_H^\Delta - P_H$, e também é específico para um dado horizonte temporal; no entanto, a desigualdade não se baseia no desvio absoluto máximo verificado nas taxas futuras, mas sim no maior choque verificado sobre a sua inclinação; logo, o modelo mede a exposição ao risco de uma carteira relativamente a variações na inclinação da EPTJ. O modelo permite ainda obter uma nova perspectiva sobre as propriedades da convexidade analisadas anteriormente.

A expressão do M^2 é dada por

$$M^2 = \sum_{t=1}^T (t-H)^2 \times w_t, \quad (2.19)$$

conservando-se os significados anteriores.

Com $H=0$, M^2 reduz-se à convexidade. Tendo em conta (2.19), define-se a desigualdade

$$\frac{\Delta P_H}{P_H} \geq -(D-H)\Delta f(H) - \frac{1}{2}K_4 \times M^2, \quad (2.20)$$

com $K_4 \geq \frac{\partial \Delta f(t)}{\partial t}$, para todo o $t \geq 0$. Uma vez que o objectivo é minimizar a

volatilidade da carteira, impõe-se a restrição $D=H$, fazendo com que, contrariamente ao M-Absoluto, o modelo seja baseado em duas medidas de risco.

A constante K_4 está fora do controlo do investidor, tal como no modelo do ponto anterior. Apenas no caso trivial, isto é, com uma obrigação de cupão zero com a maturidade igual ao horizonte temporal é que é possível uma imunização perfeita.

A desigualdade mostra-se facilmente tendo em conta que

$$\int_t^H \Delta f(z) dz = \int_t^H \Delta f(H) dz - \int_t^H \left[\int_z^H \frac{\partial \Delta f(u)}{\partial u} du \right] dz. \quad (2.21)$$

Mudando a ordem de integração do segundo termo do lado direito da equação, tem-se

$$\int_t^H \Delta f(z) dz = -\Delta f(H)(t-H) - \int_t^H (u-t) \frac{\partial \Delta f(u)}{\partial u} du. \quad (2.22)$$

Notando que K_4 representa a inclinação máxima no choque na EPTJ das taxas instantâneas futuras ao longo da maturidade do termo t , considerem-se, assim, dois casos:

Caso 1: $H \geq t$

Tem-se,

$$\int_t^H (u-t) \frac{\partial \Delta f(u)}{\partial u} du \leq \int_t^H (u-t) K_4 du = \frac{1}{2} K_4 (H-t)^2. \quad (2.23)$$

Caso 2: $H \leq t$

Tem-se

$$\int_t^H (u-t) \frac{\partial \Delta f(u)}{\partial u} du = \int_H^t (t-u) K \frac{\partial \Delta f(u)}{\partial u} du \leq \int_H^t (t-u) K_4 du = \frac{1}{2} K_4 (t-H)^2. \quad (2.24)$$

Combinando (2.23) e (2.24), e tendo em conta (2.22), obtém-se

$$\int_t^H \Delta f(z) dz \geq -\Delta f(H)(t-H) - \frac{1}{2} K_4 (t-H)^2. \quad (2.25)$$

Da desigualdade (2.25), chega-se facilmente a (2.20), seguindo o mesmo raciocínio utilizado no caso do M-Absoluto, e considerando, mais uma vez, que $CF_t \geq 0$, para todo o $t \geq 0$.

Desenvolvendo o quadrado de (2.19) facilmente se verifica a relação linear entre o M-Quadrado e convexidade,

$$M^2 = C - 2DH + H^2. \quad (2.26)$$

Fixando-se a duração, M-Quadrado é uma função crescente da convexidade. No ponto anterior mostrou-se que, quanto maior a convexidade, maior a rendibilidade da carteira face a choques paralelos; no entanto, o modelo consiste em minimizar o M-Quadrado da carteira. Assim, a expressão (2.26) exprime o conhecido paradoxo convexidade/M-Quadrado.

Lacey e Nawalkha (1993), de forma a resolver este paradoxo, propõem uma expansão de segunda ordem para a rendibilidade realizada da carteira, $R(H)$.

Com $R(H) = \frac{P_H^\Delta - P_0}{P_0}$, tem-se

$$R(H) = \frac{1}{P_0} \left[e^{\int_0^H f(z) dz} \left[\sum_{t=1}^T CF_t \times e^{-\int_0^t f(z) dz} e^{\int_t^H \Delta f(z) d(z)} \right] - P_0 \right]. \quad (2.27)$$

Considerando a expansão de segunda ordem para $e^{\int_t^H \Delta f(z) d(z)}$, à volta do ponto $t = H$, vem

$$e^{\int_t^H \Delta f(z) d(z)} = 1 - (t - H) \Delta f(H) - \frac{1}{2} (t - H)^2 \left[\frac{\partial \Delta f(t)}{\partial t} \Big|_{t=H} - (\Delta f(H))^2 \right] + \varepsilon(t), \quad (2.28)$$

sendo $\varepsilon(t)$ o erro devido aos termos de ordem superior da expansão. Substituindo (2.28) em (2.27) obtém-se, após alguma manipulação algébrica,

$$R(H) = R_F(H) + \gamma_1 [D - H] + \gamma_2 M^2 + \varepsilon(t), \quad (2.29)$$

onde $R_F(H)$ é a rendibilidade sem risco de uma obrigação de cupão zero (sem risco de crédito) com maturidade H , isto é,

$$R_F(H) = e^{\int_0^H f(z) dz} - 1. \quad (2.30)$$

O coeficiente da duração e o coeficiente do M-Quadrado são dados por

$$\gamma_1 = -\Delta f(H) (1 + R_F(H)) \quad (2.31)$$

e por

$$\gamma_2 = -\frac{1}{2} (1 + R_F(H)) \left[\frac{\partial \Delta f(t)}{\partial t} \Big|_{t=H} - (\Delta f(H))^2 \right], \quad (2.32)$$

respectivamente.

O coeficiente do M-Quadrado pode ser dividido em duas componentes, isto é,

$$\gamma_2 = EC - ER \quad (2.33)$$

em que

EC = Efeito Convexidade:

$$\frac{1}{2}(1+R_F(H))(\Delta f(H))^2 \quad (2.34)$$

e ER = Efeito Risco:

$$\frac{1}{2}(1+R_F(H))\left.\frac{\partial \Delta f(t)}{\partial t}\right|_{t=H}. \quad (2.35)$$

O efeito convexidade é positivo, independentemente do tipo de choque; logo, quanto maior o M-Quadrado (que é o mesmo que dizer, quanto maior a convexidade), maior a rendibilidade da carteira. Assim, o efeito convexidade está em conformidade com a visão tradicional da mesma.

O efeito risco poderá ser positivo, negativo ou zero, dependendo do tipo de movimentação. Note-se que se o choque for paralelo ao longo da EPTJ, então,

$\frac{\partial \Delta f(t)}{\partial t} = 0$ e, portanto, apenas o efeito convexidade terá influência em γ_2 - e, consequentemente, na rendibilidade da carteira. Um choque positivo (negativo) na inclinação da EPTJ diminui (aumenta) o valor do coeficiente γ_2 ; consequentemente, quanto maior (menor) o M-Quadrado/convexidade, menor (maior) a rendibilidade da carteira.

Os mesmos autores, durante o período de 1976 a 1987, utilizaram uma versão modificada da expressão (2.29), de forma a estimar o valor empírico do coeficiente γ_2 , para as obrigações do tesouro norte americanas. Dividindo o período em vários sub-períodos, concluem que o sinal de γ_2 é efectivamente negativo em todos eles e com significância estatística em dois, veja-se Lacey e Nawalkha (1993). Ou seja, o efeito risco, segundo os dados analisados pelos autores, tende a sobrepor-se ao efeito convexidade.

É importante ter-se em conta que o parâmetro γ_2 compara apenas $(\Delta f(H))^2$ e

$\frac{\partial \Delta f(t)}{\partial t} \Big|_{t=H}$, ignorando os efeitos de ordens superiores - e dado que $|\Delta f(H)| < 1$, é de

esperar que o seu quadrado tenha um efeito reduzido. Não obstante, o modelo define claramente que, quando os choques positivos sobre a inclinação das taxas futuras são bem mais significativos que os choques sobre a sua altura, uma convexidade elevada pode não ser uma propriedade desejável.

2.2 Modelo de vector de durações e Modelo de vector de durações generalizado

Embora os modelos M-Absoluto e M-Quadrado representem uma melhoria significativa em relação à duração de Fisher e Weil, a sua estratégia limita-se a construir uma carteira com cash flows centrados à volta de um determinado horizonte temporal. Chambers, Carlton e McEnally (1988) derivam o modelo vector de durações, com o intuito de captar os efeitos na função-preço resultantes de variações na altura, inclinação, curvatura, taxa de variação da curvatura e outros parâmetros de ordem superior da função representativa da EPTJ. Nawalkha e Lacey (1999) propõem um modelo de vector de durações generalizado, que como o próprio nome indica é uma generalização do primeiro.

2.2.1 Modelo de vector de durações

Neste modelo, a variação percentual instantânea da carteira, após um choque instantâneo nas taxas futuras, é dada por

$$\begin{aligned}
R(0) &= \frac{\Delta P_0}{P_0} = -D(1) \times [\Delta f(0)] \\
&- D(2) \times \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Delta f(t)}{\partial t} - (\Delta f(0))^2 \right) \right]_{t=0} \\
&- D(3) \times \left[\frac{1}{3!} \left(\frac{\partial^2 \Delta f(t)}{\partial t^2} - 3\Delta f(0) \frac{\partial \Delta f(t)}{\partial t} + (\Delta f(0))^3 \right) \right]_{t=0}, \\
&\vdots \\
&- D(M) \times \left[\frac{1}{M!} \left(\frac{\partial^{M-1} \Delta f(t)}{\partial t^{M-1}} + \dots + (\Delta f(0))^M \right) \right]_{t=0} + \varepsilon(t)
\end{aligned} \tag{2.36}$$

em que

$$D(m) = \sum_{t=1}^T w_t \times t^m, \quad m = 1, 2, \dots, M, \tag{2.37}$$

representa as durações de ordem 1 até à ordem M e w_t mantém o seu significado anterior.

A expressão (2.36) pode ser vista como um produto interno de 2 vectores, o vector de durações e o vector de choques; logo, a sua forma simplificada é dada por

$$R(0) = \frac{\Delta P_0}{P_0} = D(1)Y_1 + D(2)Y_2 + D(3)Y_3 + \dots + D(M)Y_M + \varepsilon(t). \tag{2.38}$$

O vector $D(m)$ depende da maturidade da carteira, enquanto o vector Y_m depende da natureza dos choques na estrutura das taxas futuras instantâneas. Note-se que Y_1 representa o choque paralelo e $D(1)$ a duração de Fisher e Weil, Y_2 o choque na inclinação menos o choque paralelo ao quadrado e $D(2)$ não é mais que a convexidade; logo, com $M=2$ e $H=0$, o modelo é equivalente ao modelo M-Quadrado.

À medida que se acrescentam termos no lado direito de (2.38), isto é, à medida que se aumenta a ordem da expansão, vão captar-se os efeitos de ordens superiores e consequentemente diminui-se o valor de $\varepsilon(t)$, o termo residual.

O modelo deduz-se facilmente tendo em conta (2.27). Considerando novamente a

expansão de Taylor de $e^{\int_H^t \Delta f(z) d(z)}$ em torno de H , neste caso, até à ordem M , vem

$$\begin{aligned}
 e^{\int_H^t \Delta f(z) d(z)} &= 1 - [t - H] \times [\Delta f(H)] \\
 &- \frac{1}{2} [t - H]^2 \times \left[-(\Delta f(t))^2 + \frac{\partial \Delta f(t)}{\partial t} \right]_{t=H} \\
 &- \frac{1}{3!} [t - H]^3 \times \left[+(\Delta f(t))^3 - 3\Delta f(t) \frac{\partial \Delta f(t)}{\partial t} + \frac{\partial^2 \Delta f(t)}{\partial t^2} \right]_{t=H} \\
 &\vdots \\
 &- \frac{1}{M!} [t - H]^M \times \left[\left(\frac{\partial^{M-1} \Delta f(t)}{\partial t^{M-1}} + \dots + (\Delta f(0))^M \right) \right]_{t=H} + \varepsilon(t).
 \end{aligned} \tag{2.39}$$

Com $H = 0$ e substituindo (2.39) em (2.27) obtém-se quase de imediato (2.36).

A imunização de uma obrigação neste modelo para um determinado horizonte temporal, H , implica as seguintes restrições:

$$D(1) = \sum_{t=1}^T w_t \times t = H; \quad D(2) = \sum_{t=1}^T w_t \times t^2 = H^2 \dots \quad D(M) = \sum_{t=1}^T w_t \times t^M = H^M. \tag{2.40}$$

O vector de durações de uma carteira é obtido pela média das proporções investidas em

cada obrigação dadas por p_j , em que $j=1, 2, \dots, n$, e $\sum_{j=1}^n p_j = 1$, isto é

$$D(m) = \sum_{j=1}^n D_j(m) p_j. \tag{2.41}$$

Para se imunizar uma carteira de obrigações num dado horizonte temporal tem-se

$$D(1) = \sum_{j=1}^n p_j D_j(1) = H; \dots; D(M) = \sum_{j=1}^n p_j D_j(M) = H^M; \quad \sum_{j=1}^n p_j = 1, \tag{2.42}$$

que tem solução única quando $n = M + 1$. Caso $n > M + 1$, pode obter-se uma solução

passando ao problema $\text{Min} \left[\sum_{j=1}^n p_j^2 \right]$, sujeito às restrições (2.42). Uma vez que as

restrições são todas de igualdade, o problema é facilmente resolvido através do método

dos multiplicadores de Lagrange. Recorde-se que minimizar $\sum_{j=1}^n p_j^2$ significa diversificar o investimento tanto quanto possível nas n obrigações que fazem parte da carteira.

2.2.1.1 Estratégias de *hedging* no modelo de vector de durações

Chambers *et. al* (1997) concluem que para $M = 5$ a estratégia de imunização no modelo vector de durações elimina em cerca de 95% o risco do processo estocástico, pelo que o modelo é virtualmente independente do processo estocástico que rege a EPTJ.

O investidor, para além da estratégia de imunização, poderá igualar o vector de durações da carteira ao valor de um índice de obrigações, de modo a replicar a rendibilidade-risco desse mesmo índice. Para tal, aplicam-se as seguintes restrições,

$$D(1)_{obrig.} = D(1)_{índ.}, \quad D(2)_{obrig.} = D(2)_{índ.}, \dots, \quad D(M)_{obrig.} = D(M)_{índ.} \quad (2.43)$$

A imunização num contexto de activos e passivos do capítulo anterior poderá ser redefinida da seguinte forma,

$$VP_A \times D_A(1) = VP_L \times D_L(1), \quad VP_A \times D_A(2) = VP_L \times D_L(2). \quad (2.44)$$

Para uma estratégia activa, suponha-se que se espera um choque nas taxas futuras da seguinte magnitude; $Y_1 = \gamma_1$, $Y_2 = \gamma_2$ e $Y_3 = \gamma_3$. Deste modo, estabelece-se um vector de durações alvo, em que o sinal de $D(1)$, $D(2)$ e $D(3)$ seja igual ao sinal de γ_1 , γ_2 e γ_3 , respectivamente. Assim, $D(m) \times Y_m > 0$, $m = 1, 2, 3$.

Chambers *et. al* (1988) concluem que as estimativas para o cálculo de $D(m)$ utilizando as *yield to maturities* das respectivas obrigações pouco diferem dos cálculos em que se inclui toda a estrutura das taxas futuras. No entanto, diferenças significativas são

obtidas quando se arredonda o tempo passado entre os pagamentos de cupões para a data do cupão mais próxima.

2.2.2 Modelo de vector de durações generalizado

O facto do modelo de vector de durações captar variações nos parâmetros de ordens superiores da EPTJ faz com que se melhore consideravelmente a estratégia de imunização, quando comparada com o modelo de Macaulay ou ao modelo de Fisher e Weil. Mas, ao mesmo tempo, também o torna mais sensível à mesma, aumentando assim a necessidade de reestruturação da carteira se se quiser manter as condições de imunização. É claro que, quanto mais frequente for a reestruturação da carteira, maior será a sua exposição ao risco não sistemático e maiores serão os custos de transacção suportados pelo investidor.

Nawalkha e Lacey (1999) propõem então um modelo de vector de durações generalizado que, segundo os autores, melhora a qualidade de imunização sem que haja a necessidade de aumentar a dimensão do vector e, consequentemente, diminuindo a frequência da reestruturação da carteira. A inovação consiste em substituir t por uma função genérica $g(t)$. Com $g(t)=t$, o modelo vector de durações genérico reduz-se ao modelo do ponto anterior. A motivação advém do facto de as taxas de juro de curto prazo exibirem uma volatilidade superior à das taxas de longo prazo. Logo, é conveniente estabelecer-se $g(t)$ de maneira a atribuir um peso relativo superior aos choques nas taxas de maturidades inferiores. Os autores definem assim

$$\frac{\Delta P}{P} \simeq D^*(1) \times Y_1^* + D^*(2) \times Y_2^* + \dots + D^*(M) \times Y_M^*, \quad (2.45)$$

em que

$$D^*(m) = \sum_{t=1}^T w_t g(t)^m, \quad \text{para } m = 1, 2, \dots, M, \quad (2.46)$$

$$Y_m^* = (1 + R_F(H)) Z_m^* \quad (2.47)$$

e

$$\begin{aligned} Z_1^* &= -p(g(H)) \\ Z_2^* &= -\frac{1}{2} \left[\left(- (p(g))^2 + \frac{\partial p(g)}{\partial g} \right) \right]_{g=g(H)} \\ Z_3^* &= -\frac{1}{3!} \left[\left((p(g))^3 - 3p(g) \frac{\partial p(g)}{\partial g} + \frac{\partial^2 p(g)}{\partial^2 g} \right) \right]_{g=g(H)} \\ &\vdots \\ Z_M^* &= -\frac{1}{M!} \left[\left((-1)^{M+1} (p(g))^M + \dots + \frac{\partial^{M-1} p(g)}{\partial^{M-1} g} \right) \right]_{g=g(H)}. \end{aligned} \quad (2.48)$$

A derivação do modelo é feita exactamente do mesmo modo que no ponto anterior, tendo em conta que se pode reescrever $f(t)$, e consequentemente $\Delta f(t)$, como funções em cadeia dadas por

$$f(t) = h(g(t)) \quad (2.49)$$

e por

$$\Delta f(t) = \Delta h(g(t)). \quad (2.50)$$

Partindo do princípio que a inversa de $g(t)$ existe, vem

$$t = g^{-1}(g). \quad (2.51)$$

Admitindo também que é diferenciável em todo o seu domínio, procede-se à mudança

de variável de $\Delta f(z)$ em $e^t \int_H^H \Delta f(z) d(z)$, isto é,

$$e^t \int_H^H \Delta f(z) d(z) = e^{\int_{g(t)}^{g(H)} \Delta h(g(t)) \frac{\partial [g^{-1}(g)]}{\partial g} d(g)}. \quad (2.52)$$

O vector de durações generalizado é obtido, como se referiu, de modo análogo ao usado anteriormente; no entanto, a expansão de Taylor é aplicada ao termo do lado direito de

(2.52), tendo em conta que $p(g(t)) = \Delta h(g(t)) \frac{\partial [g^{-1}(g)]}{\partial g}$, de forma a simplificar a notação.

Os autores propõem a seguinte forma funcional para $g(t)$,

$$g(t) = t^\alpha, \quad \alpha > 0. \quad (2.53)$$

Como se pretende atribuir um peso relativo superior aos choques nas maturidades inferiores, α tem de ser menor que 1. As condições de imunização obtêm-se como em (2.42), substituindo t por $g(t)$ e H por $g(H)$.

2.3 Modelo Direccional

Reitano (1992) propõe um modelo para a duração e convexidade onde as taxas para os diferentes prazos se deslocam na direcção de um determinado vector, perante um choque de certa magnitude. Uma vez que os elementos do vector de direcção podem conter qualquer número real, e não existe qualquer tipo de interdependência entre os mesmos, o modelo não depende da formulação matemática subjacente à EPTJ.

2.3.1 Construção do Modelo Direccional

O vector genérico que representa as m taxas de juro à vista para as diversas maturidades é dado por $\vec{i} = (i_1, i_2, \dots, i_m)$. Concretizando o vector para o momento zero tem-se $\vec{i}_0 = (i_{01}, i_{02}, \dots, i_{0m})$.

Seja $\vec{N} = (n_1, n_2, \dots, n_m)$ o vector direccional ($m \times 1$) que define a direcção segundo a qual se deslocam as taxas de juro à vista. Então, um choque de magnitude Δi implica a seguinte deslocação da curva inicial:

$$\vec{i}_0 + \Delta i \vec{N} = (i_{01} + \Delta i n_1, i_{02} + \Delta i n_2, \dots, i_{0m} + \Delta i n_m). \quad (2.54)$$

Considere-se

$$P(\Delta i) = P(\vec{i}_0 + \Delta i \vec{N}) \quad (2.55)$$

como a função-preço no modelo direccional, imediatamente após um choque de magnitude Δi na direcção \vec{N} .

Admitindo a existência da primeira derivada direccional da função-preço em ordem a Δi , tem-se

$$\frac{dP(\vec{i} + \Delta i \vec{N})}{d\Delta i} = \sum_{i=1}^m n_j \frac{\partial P(\vec{i} + \Delta i \vec{N})}{\partial i_i}. \quad (2.56)$$

Facilmente se mostra (2.56) se se considerar o diferencial total de $y = f(x_1, \dots, x_m)$, dado por

$$dy = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f(x_1, \dots, x_m)}{\partial x_j} dx_j. \quad (2.57)$$

Suponha-se que cada diferencial dx_j é escrito da seguinte forma

$$dx_j = n_j d\lambda, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (2.58)$$

onde $d\lambda$ é um incremento infinitesimal. Substituindo (2.58) em (2.57) obtém-se

$$\frac{dy}{d\lambda} = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f(x_1, \dots, x_m)}{\partial x_j} \times n_j = \nabla \cdot \vec{N}, \quad (2.59)$$

onde ∇ designa o gradiente do vector f no ponto (x_1, \dots, x_m) . A expressão (2.59) define a derivada direccional.

Admitindo-se a existência de segunda derivada de (2.55), vem

$$\frac{d^2 P(\vec{i} + \Delta i \vec{N})}{d\Delta i^2} = \sum_{t=1}^m \sum_{k=1}^m n_t n_k \frac{\partial^2 P(\vec{i} + \Delta i \vec{N})}{\partial i_t \partial i_k}. \quad (2.60)$$

Avaliando as derivadas no momento zero, com $\Delta i = 0$ e tendo em conta a expansão de Taylor de segunda ordem obtém-se, sucessivamente,

$$\frac{P(\vec{i}_0 + \Delta i \vec{N})}{P(\vec{i}_0)} = 1 - D_{\vec{N}}(\vec{i}_0) \Delta i + \frac{1}{2} C_{\vec{N}}(\vec{i}_0) \Delta i^2 \quad (2.61)$$

$$D_{\vec{N}}(\vec{i}_0) = -\frac{1}{P(\vec{i}_0)} \sum_{t=1}^m n_j \frac{\partial P(\vec{i})}{\partial i_t} \Big|_{i_t=i_{0t}} \quad (2.62)$$

$$C_{\vec{N}}(\vec{i}_0) = \frac{1}{P(\vec{i}_0)} \sum_{t=1}^m \sum_{k=1}^m n_t n_k \frac{\partial^2 P(\vec{i})}{\partial i_t \partial i_k} \Big|_{i_t=i_{0t}, i_k=i_{0k}}, \quad (2.63)$$

sendo $D_{\vec{N}}(\vec{i}_0)$ e $C_{\vec{N}}(\vec{i}_0)$ a duração direccional e a convexidade direccional, respectivamente.

Facilmente se pode observar que, se $\vec{N}' = \alpha \vec{N}$, então

$$D'_{\vec{N}}(\vec{i}_0) = \alpha D_{\vec{N}}(\vec{i}_0) \quad (2.64)$$

$$e \quad C'_{\vec{N}}(\vec{i}_0) = \alpha^2 C_{\vec{N}}(\vec{i}_0). \quad (2.65)$$

Escrevendo as expressões genéricas de (2.62) e (2.63) na forma matricial, vem

$$D_{\vec{N}}(\vec{i}) = \vec{N}^T \vec{D}(\vec{i}) \quad (2.66)$$

$$e \quad C_{\vec{N}}(\vec{i}) = \vec{N}^T C(\vec{i}) \vec{N}, \quad (2.67)$$

onde $\vec{D}(\vec{i})$ é o vector $(m \times 1)$ de duração total e $C(\vec{i})$ é a matriz simétrica $(m \times m)$ de convexidade total.

Se $\vec{N} = (1, 1, \dots, 1)$ está-se perante uma deslocação paralela das taxas de juro à vista e, portanto, o modelo de Fisher e Weil pode ser visto como um caso particular do modelo direccional. Neste caso tem-se que

$$\sum_{t=1}^m D_t(\vec{i}) = D(\vec{i}), \quad (2.68)$$

onde $D_t(\vec{i})$, $t=1,2,\dots,m$, é o elemento genérico do vector de duração total.

Com o objectivo de comparar os efeitos na função-preço de diferentes vectores de direcção, Reitano propõe que a norma de \vec{N} seja fixada em \sqrt{m} , de modo a igualar a dimensão de um choque paralelo, isto é, a norma do vector $\vec{N} = (1,\dots,1)$.

A função-preço ainda pode ser expressa como função de $D_{\vec{N}}(\vec{i}_0 + t\vec{N})$, se se considerar

$f(t) = \ln(P(\vec{i}_0 + t\vec{N}))$. Logo, tem-se que $\frac{df(t)}{dt} = -D_{\vec{N}}(\vec{i}_0 + t\vec{N})$. Integrando e aplicando

expoente obtém-se

$$\frac{P(\vec{i}_0 + \Delta i \vec{N})}{P(\vec{i}_0)} = e^{-\int_0^{\Delta i} D_{\vec{N}}(\vec{i}_0 + t\vec{N}) dt}. \quad (2.69)$$

Esta igualdade motiva a seguinte aproximação de segunda ordem do logaritmo natural da função-preço:

$$\frac{P(\vec{i}_0 + \Delta i \vec{N})}{P(\vec{i}_0)} \simeq \exp \left\{ -D_{\vec{N}}(\vec{i}_0) \Delta i + \frac{1}{2} [C_{\vec{N}}(\vec{i}_0) - D_{\vec{N}}^2(\vec{i}_0)] (\Delta i)^2 \right\}. \quad (2.70)$$

É claro que se $C_{\vec{N}}(\vec{i}_0) > D_{\vec{N}}^2(\vec{i}_0)$ o ajustamento de segunda ordem é positivo; caso contrário, será negativo. Se o vector de direcção representar um choque paralelo, o ajustamento de segunda ordem será sempre positivo.

2.3.2 Desigualdades no Modelo direcciona

O valor da duração direcciona depende do vector direcciona. Uma das vantagens do modelo é que, uma vez fixada a norma de \vec{N} , é possível definir os limites superior e inferior de $D_{\vec{N}}(\vec{i}_0)$. Aplicando directamente o lema de Cauchy-Schwarz, vem

$$-\|\vec{D}(\vec{i}_0)\|\|\vec{N}\| \leq D_{\vec{N}}(\vec{i}_0) \leq \|\vec{D}(\vec{i}_0)\|\|\vec{N}\|. \quad (2.71)$$

Os limites serão atingidos se o vector de duração total for paralelo ao vector de direcção.

Logo, o limite superior (inferior) de (2.71) é atingido para todos os múltiplos positivos (negativos) do vector unitário \vec{N}_0 , em que

$$\vec{N}_0 = \frac{\vec{D}(\vec{i}_0)}{\|\vec{D}(\vec{i}_0)\|}. \quad (2.72)$$

Assim, é importante analisar se o vector de direcção da expressão anterior, e todos os seus múltiplos, são minimamente consistentes com a realidade.

Se todos os elementos do vector de duração total forem iguais, os choques paralelos serão os que têm maior impacto na função preço, pois $\vec{N} = (1,1,\dots,1)$ será paralelo a $\vec{D}(\vec{i}_0)$.

Tem-se ainda que

$$\|\vec{D}(\vec{i}_0)\| \geq \frac{D(\vec{i}_0)}{\sqrt{m}}, \quad (2.73)$$

o que significa que para uma dada duração de Fisher e Weil a norma do vector de duração total é mínima quando todos os seus elementos forem iguais. Neste caso, a amplitude da desigualdade em (2.71) é minimizada (para um dado vector de direcção), e ao mesmo tempo serão os choques paralelos que terão um maior impacto na função-preço. A desigualdade em (2.73) é um resultado conhecido e mostra-se facilmente tendo

em conta que $\sum_{i=1}^m \left(x_i - \sum_{i=1}^m x_i / m \right)^2 = \sum_{i=1}^m x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^m x_i \right)^2 / m \geq 0$, que, obviamente, só será

igual a zero se $x_1 = x_2 = \dots = x_m$.

Tal como para a duração direccional, a convexidade direccional depende da direcção em que as taxas se movimentam para as diversas maturidades. Aplicando directamente a desigualdade quadrática obtêm-se os limites superior e inferior de $C_{\vec{N}}(\vec{i}_0)$, ou seja,

$$\lambda_1 \|\vec{N}\|^2 \leq C_{\vec{N}}(\vec{i}_0) \leq \lambda_m \|\vec{N}\|^2, \quad (2.74)$$

com λ_1 e λ_m a menor e a maior raiz característica, respectivamente. Os limites serão atingidos para todos os múltiplos dos vectores característicos associados, \vec{N}_1 e \vec{N}_m .

A desigualdade quadrática demonstra explicitamente que apenas nos casos em que todas as raízes características da matriz $C(\vec{i}_0)$ são positivas (negativas) é que para qualquer vector \vec{N} , $C_{\vec{N}}(\vec{i}_0)$ é positivo (negativo). Ou seja, quando $C(\vec{i}_0)$ for definida positiva (negativa). Segundo o autor, $C_{\vec{N}}(\vec{i})$ admite normalmente ambos os sinais.

Logo, o facto da convexidade direccional ser positiva, quando $\vec{N} = (1,1,\dots,1)$, não implica que o seja para outro tipo de vectores de direcção e, consequentemente, uma elevada convexidade no modelo de Macaulay e/ou no modelo de Fisher e Weil poderá vir a traduzir-se numa convexidade direccional bastante negativa; logo, a estratégia de *Barbell-Bullet* não representa uma situação de arbitragem num ambiente de choques não paralelos.

Embora o limite inferior de (2.74) possa admitir sinal negativo, é necessário averiguar se tal vector de direcção será plausível na realidade. Reitano (1992) mostra que a possibilidade de valores negativos para a convexidade direccional não se restringe apenas ao contexto teórico e será mais provável quando a carteira é constituída por activos e passivos.

2.4 Modelo Parcial

Alternativamente ao modelo direccionado, Reitano (1990) propõe um modelo que reconhece de uma forma mais explícita a natureza multi-variada da função-preço: o chamado Modelo Parcial. Tal como o modelo do ponto anterior, o Modelo Parcial permite a modelização face a qualquer tipo de deslocamento da EPTJ. O autor mostra como se podem aplicar a duração e a convexidade de Macaulay e a duração e convexidade do modelo de Fisher e Weil, quando os choques não são paralelos. Define ainda duas medidas de risco de taxa de juro, a alavanca duracional e o multiplicador duracional, que traduzem variações potenciais extremas da função-preço.

Para isso, define-se a função-preço $P(\vec{i} + \vec{\Delta i})$ como função de m variáveis. Seja o vector (coluna) $\vec{i}_0 = (i_{01}, i_{02}, \dots, i_{0m})$ a EPTJ inicial e $\vec{\Delta i} = (\Delta i_1, \Delta i_2, \dots, \Delta i_m)$ o choque nas taxas de juro à vista para as diversas maturidades. Claro que $\vec{i}_0 + \vec{\Delta i} = (i_{01} + \Delta i_1, i_{02} + \Delta i_2, \dots, i_{0m} + \Delta i_m)$ representará a nova EPTJ após o choque $\vec{\Delta i}$.

2.4.1 Duração e Convexidade Parcial

A expansão de Taylor de segunda ordem da função-preço é dada por

$$P(\vec{i}_0 + \vec{\Delta i}) \simeq P(\vec{i}_0) + \sum_{j=1}^m \Delta i_j \left. \frac{\partial P(\vec{i}_j)}{\partial i_j} \right|_{i_j=i_{0j}} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \Delta i_j \Delta i_k \left. \frac{\partial^2 P(\vec{i}_j)}{\partial i_j \partial i_k} \right|_{i_j=i_{0j}, i_k=i_{0k}}, \quad (2.75)$$

com as respectivas durações parciais e convexidades parciais dadas por

$$D_j(\vec{i}_0) = -\frac{1}{P(\vec{i}_0)} \left. \frac{\partial P(\vec{i})}{\partial i_j} \right|_{i_j=i_{0j}} \quad \text{e} \quad C_{j,k}(\vec{i}_0) = \frac{1}{P(\vec{i}_0)} \left. \frac{\partial^2 P(\vec{i})}{\partial i_j \partial i_k} \right|_{i_j=i_{0j}, i_k=i_{0k}}. \quad (2.76)$$

2.4.2 Modelação paramétrica no contexto parcial

Seja $r(t)$ uma função contínua e diferenciável definida no intervalo $[0,1]$, com $r(0) = \vec{i}_0$ e $r(1) = \vec{i}_0 + \vec{\Delta i}$, representativa da EPTJ. Usando um raciocínio semelhante ao utilizado para a dedução de (2.69), vem

$$\frac{P(\vec{i}_0 + \vec{\Delta i})}{P(\vec{i}_0)} = e^{-\int_0^1 D_r(t) \frac{dr(t)}{dt} dt}. \quad (2.77)$$

A aproximação de segunda ordem de (2.77) é dada por

$$\frac{P(\vec{i}_0 + \vec{\Delta i})}{P(\vec{i}_0)} \simeq \exp \left\{ \vec{D}(\vec{i}_0) \vec{\nabla} r_{(t=0)} + \frac{1}{2} \left(\left(\vec{\nabla} r_{(t=0)} \right)^T \left(C(\vec{i}_0) - \vec{D}(\vec{i}_0)^T \vec{D}(\vec{i}_0) \right) \vec{\nabla} r_{(t=0)} - \vec{D}(\vec{i}_0) \vec{\nabla}^2 r_{(t=0)} \right) \right\}. \quad (2.78)$$

No caso de $r(t)$ ser linear, ou seja, ser $r(t) = \vec{i}_0 + t\vec{\Delta i}$, o modelo reduz-se ao modelo direccional com $t\vec{\Delta i} = \Delta i \vec{N}$.

2.4.3 Choque equivalente na *yield to maturity*

Já se expuseram alguns conceitos que evidenciam a falta de aderência da duração Macaulay/modificada. A *yield to maturity*, por si só, não descreve com fiabilidade o efeito dos choques arbitrários ao longo da EPTJ sobre a função-preço. Deste modo, o autor propõe que uma deslocação de $\vec{\Delta i}$ seja aproximada por uma deslocação equivalente na *yield to maturity*, utilizando para esse efeito o modelo parcial, e aplicando-se de seguida os parâmetros tradicionais de risco apresentados no primeiro capítulo.

Considere-se \vec{i}_0 como a curva das taxas de juro à vista inicial e seja I_0 a *yield to maturity* equivalente, de modo que $P(\vec{i}_0) = P(I_0)$.

Seja $D_m(I_0)$ a duração modificada no momento inicial definida no capítulo anterior e seja $P(I_0 + \Delta I)$ a respectiva função-preço, após um choque na *yield to maturity* de ΔI . Nestas condições,

$$P(I_0 + \Delta I) \simeq P(I_0) [1 - D_m(I_0) \Delta I] \quad (2.79)$$

e

$$P(\vec{i}_0 + \vec{\Delta i}) \simeq P(\vec{i}_0) [1 - \vec{D}(\vec{i}_0) \vec{\Delta i}]. \quad (2.80)$$

Igualando (2.79) a (2.80) obtém-se

$$\Delta I \simeq \frac{\vec{D}(\vec{i}_0) \vec{\Delta i}}{D_m(I_0)}. \quad (2.81)$$

A expressão representa o choque equivalente (de primeira ordem) na *yield to maturity* face a um choque de magnitude $\vec{\Delta i}$, reduzindo deste modo o risco do processo estocástico da duração modificada.

Se $\vec{\Delta i} = (1, 1, \dots, 1)$, o numerador fica reduzido à duração de Fisher e Weil.

Expandindo a aproximação em (2.79) e em (2.80), a segunda derivada permite melhorar a aderência, o que resulta na seguinte expressão

$$\Delta I = \frac{D_m(I_0) - \sqrt{D_m(I_0)^2 - C(I_0) \vec{D}(\vec{i}_0) \vec{\Delta i} + C(I_0) \vec{\Delta i}^T C(\vec{i}_0) \vec{\Delta i}}}{C(I_0)}. \quad (2.82)$$

Nesta equação (fórmula resolvente), $C(I_0)$ é a convexidade do modelo de Macaulay.

Apenas se considera a solução de raiz negativa, pois esta solução satisfaz a condição

$\Delta I = 0$, quando $\vec{\Delta i} = \vec{0}$; no entanto, nada garante que o argumento da raiz seja positivo e, como tal, (2.82) poderá originar valores complexos. Nesse caso, não existe solução real para ΔI .

2.4.4 Choque paralelo equivalente

Embora a duração de Fisher e Weil, $\sum_{j=1}^m D_j(\vec{i}_0) = D(\vec{i}_0)$, admita qualquer forma para a EPTJ inicial, o modelo, como se viu, continua restrito a choques paralelos. Assim, tal como no ponto anterior, Reitano propõe que uma deslocação de $\vec{\Delta i}$ seja aproximada por uma deslocação paralela equivalente, de forma a poder aplicar-se directamente o modelo de duração de Fisher e Weil.

Definindo, Δi^E como choque paralelo equivalente, tem-se que

$$\Delta i^E = \frac{\vec{D}(\vec{i}_0) \cdot \vec{\Delta i}}{\sum_{j=1}^m D_j(\vec{i}_0)}. \quad (2.83)$$

Portanto, Δi^E não é mais que a média, ponderada pela duração de Fisher e Weil, da magnitude do choque $\vec{\Delta i}$, que terá de ser multiplicado pelo vector $(1,1,...,1)$, de forma a obter-se o vector do choque paralelo equivalente.

A aproximação de segunda ordem é obtida do mesmo modo que em (2.82), isto é, expandido as respectivas funções preço à segunda derivada e resolvendo a equação quadrática em ordem a Δi^E .

2.4.5 Alavanca “duracional”

Facilmente se vê que, se todos os elementos do vector $\vec{D}(\vec{i}_0)$ tiverem o mesmo sinal, então

$$\min(\Delta i_j) \leq \Delta i^E \leq \max(\Delta i_j) \quad (2.84)$$

No caso em que os elementos do vector de duração parcial apresentam sinais contrários, a relação entre Δi^E e $\overrightarrow{\Delta i}$ não poderá ser definida por (2.84).

Para ultrapassar essa limitação, define-se a chamada alavanca “direccional”,

$$L(\overrightarrow{\Delta i}) = \frac{\Delta i^E}{\|\overrightarrow{\Delta i}\|}, \quad (2.85)$$

da qual se obtém a alavanca “duracional”,

$$L(\vec{i}_0) = \text{Max}\{L(\overrightarrow{\Delta i})\}. \quad (2.86)$$

Note-se que $L(\lambda \overrightarrow{\Delta i}) = L(\overrightarrow{\Delta i})$, para $\lambda > 0$ e $L(-\overrightarrow{\Delta i}) = -L(\overrightarrow{\Delta i})$. O que significa que se pode generalizar (2.84) do seguinte modo:

$$-L(\vec{i}_0) \|\overrightarrow{\Delta i}\| \leq \Delta i^E \leq L(\vec{i}_0) \|\overrightarrow{\Delta i}\|. \quad (2.87)$$

Substituindo (2.83) em (2.85), resulta

$$\sum_{j=1}^m D_j(\vec{i}_0) \|\overrightarrow{\Delta i}\| L(\overrightarrow{\Delta i}) = \overrightarrow{D}(\vec{i}_0) \overrightarrow{\Delta i}; \quad (2.88)$$

Tendo em conta (2.88) e a desigualdade de Cauchy-Schwarz, vem

$$\left| \sum_{j=1}^m D_j(\vec{i}_0) \right| \|\overrightarrow{\Delta i}\| L(\overrightarrow{\Delta i}) \leq \|\overrightarrow{D}(\vec{i}_0)\| \|\overrightarrow{\Delta i}\|. \quad (2.89)$$

Notando que $L(\overrightarrow{\Delta i})$ é uma função ímpar, tem-se

$$-\frac{\|\overrightarrow{D}(\vec{i}_0)\|}{\sum_{j=1}^m D_j(\vec{i}_0)} \leq L(\overrightarrow{\Delta i}) \leq \frac{\|\overrightarrow{D}(\vec{i}_0)\|}{\sum_{j=1}^m D_j(\vec{i}_0)}. \quad (2.90)$$

O limite superior em (2.90) é atingido, se e só se $\overrightarrow{\Delta i} = c \overrightarrow{D}(\vec{i}_0)$, em que $\text{ sinal}(c) = \text{ sinal}$

$$(D(\vec{i}_0)).$$

De (2.90) é directo que

$$L(\vec{i}_0) = \frac{\|\vec{D}(\vec{i}_0)\|}{\left| \sum_{j=1}^m D_j(\vec{i}_0) \right|}; \quad (2.91)$$

Isto é, se a norma do vector duração for elevada, em relação ao valor absoluto da duração de Fisher e Weil, então deslocações não paralelas de magnitude reduzida poderão originar choques paralelos equivalentes elevados, aumentando assim o risco do processo estocástico quando se ignora essa possibilidade.

Se $D_j(\vec{i}_0) = \frac{D(\vec{i}_0)}{m}$, para todo o j , então $L(\vec{i}_0)$ atinge o valor mínimo da desigualdade

$$L(\vec{i}_0) \geq \frac{1}{\sqrt{m}}. \quad (2.92)$$

Uma vez que

$$L(\vec{i}_0)^2 = \frac{\sum_{j=1}^m D_j(\vec{i}_0)^2}{\left(\sum_{j=1}^m D_j(\vec{i}_0) \right)^2} = \frac{\sum_{j=1}^m D_j(\vec{i}_0)^2}{\sum_{j=1}^m D_j(\vec{i}_0) + 2 \sum_{j=1}^{m-1} \sum_{k=2}^m D_j(\vec{i}_0) D_k(\vec{i}_0)}, j < k, \quad (2.93)$$

é imediato que $L(\vec{i}_0) \leq 1$, caso todos os elementos do vector de duração tenham o mesmo sinal.

Seguindo as definições apresentadas pode aproximar-se a função-preço do modelo parcial como função de $L(\vec{\Delta i})$ da seguinte forma,

$$\frac{P(\vec{i}_0 + \vec{\Delta i})}{P(\vec{i}_0)} = 1 - L(\vec{\Delta i}) D(\vec{i}_0) \|\vec{\Delta i}\|, \quad (2.94)$$

em que $L(\vec{\Delta i}) D(\vec{i}_0)$ pode ser interpretado como uma medida de duração efectiva face a choques em unidades de $\|\vec{\Delta i}\|$.

Uma vez que $L(\vec{i}_0) = \text{Máx}\{L(\vec{\Delta i})\}$, então $L(\vec{i}_0)D(\vec{i}_0)$ representa a sensibilidade máxima, da aproximação de primeira ordem, da função-preço face a uma choque de magnitude $\|\vec{\Delta i}\|$ e como tal pode ser interpretado como uma *proxy* de risco de taxa de juro.

2.4.6 Multiplicador “duracional”

Note-se que na alavanca “duracional” as unidades de medida da magnitude do choque, $\|\vec{\Delta i}\|$ e Δi^E , não são iguais.

O conceito de multiplicador “direccional”, $M(\vec{\Delta i})$, permite relacionar a dimensão de um choque não paralelo $\|\vec{\Delta i}\|$ com a dimensão do choque paralelo equivalente, aplicando uma mesma base de medida, a norma. Assim,

$$M(\vec{\Delta i}) = \frac{\sqrt{m} |\vec{D}(\vec{i}_0) \vec{\Delta i}|}{|D(\vec{i}_0)| \|\vec{\Delta i}\|}. \quad (2.95)$$

A partir de (2.95) é fácil ver a estreita relação entre o multiplicador “direccional” e a alavanca “direccional”, $M(\vec{\Delta i}) = \sqrt{m} L(\vec{\Delta i})$; logo,

$$\text{Max}\{M(\vec{\Delta i})\} = \sqrt{m} L(\vec{i}_0) = M(\vec{i}_0), \quad (2.96)$$

representa o multiplicador “duraccional”.

A motivação por detrás de $M(\vec{\Delta i})$ assenta no facto de que se $\vec{\Delta i}^E$ for o vector de choque paralelo correspondente a Δi^E , então $\|\vec{\Delta i}^E\| = \sqrt{m} |\Delta i^E|$. O módulo em (2.95) é justificado pelo facto de se pretender não só captar a magnitude do choque, mas também a sua orientação. Isto é, se o produto interno do numerador em (2.95) for negativo, para

se manter o sentido da aproximação de primeira ordem para a variação da função-preço, $D(\vec{i}_0)\|\Delta\vec{i}\|/\sqrt{m}$ deverá ter o mesmo sinal, o que significa que o rácio (2.95) é sempre positivo.

Se Δi é o valor do choque paralelo da mesma magnitude e orientação de $\vec{\Delta i}$, então, vem

$$\Delta i = \text{sinal}(\Delta i^E) \frac{\|\vec{\Delta i}\|}{\sqrt{m}}. \quad (2.97)$$

Seguindo as definições apresentadas, pode aproximar-se a função-preço do modelo parcial como função de $M(\vec{\Delta i})$ da seguinte forma,

$$\frac{P(\vec{i}_0 + \vec{\Delta i})}{P(\vec{i}_0)} \simeq 1 - M(\vec{\Delta i})D(\vec{i}_0)\Delta i. \quad (2.98)$$

A unidade de medida em (2.98) torna esta abordagem mais intuitiva que a utilizada em (2.94).

Se $\vec{\Delta i}$ representar uma deslocação paralela, então $M(\vec{\Delta i}) = 1$; portanto, (2.98) é como que uma generalização da aproximação de primeira ordem do modelo clássico e, tal como para a alavanca “duracional”, $M(\vec{\Delta i})D(\vec{i}_0)$ pode ser interpretado como uma função de duração efectiva.

Como $\text{Max}\{M(\vec{\Delta i})\} = M(\vec{i}_0)$, então $M(\vec{i}_0)D(\vec{i}_0)$ pode ser visto como uma medida de risco/volatilidade da função-preço, face a deslocações da EPTJ.

2.5 Modelo *Key rate*

Os conceitos de duração parcial e convexidade parcial são equivalentes à duração *key rate* e à convexidade *key rate* apresentadas por Ho (1992). A expressão *key rate* advém do facto do autor propor que as maturidades dos choques da EPTJ sejam agrupadas por maturidades chave, de forma a reduzir o número de variáveis do modelo, mas sem que este perca a aptidão para captar com fiabilidade as movimentações de toda a EPTJ. As maturidades chave propostas são; 0,25 - 0,5 - 1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6 - 7 - 10 - 20 e 30 anos, em que os prazos intermédios são obtidos por interpolação linear. O autor não especifica qualquer razão para a escolha das taxas chave e admite que a interpolação linear se deve a razões de simplificação.

2.5.1 Construção do Modelo *key rate*

Considere-se $\vec{\Delta i} = (\Delta i_{t(1)}, \Delta i_{t(2)}, \dots, \Delta i_{t(m)})$ como o vector de deslocações constituído pelas maturidades chave. As restantes deslocações Δi_t obtêm-se pela soma da contribuição linear $l(t, t(i))$ de cada maturidade chave, isto é

$$\begin{aligned}
 l(t, t(1)) &= \begin{cases} \Delta i_{t(1)}, & t < t(1) \\ \Delta i_{t(1)} \times \frac{t(2) - t}{t(2) - t(1)}, & t(1) \leq t \leq t(2) \\ 0, & t > t(2) \end{cases} \\
 &\vdots \\
 l(t, t(j)) &= \begin{cases} \Delta i_{t(j)} \times \frac{t - t(j-1)}{t(j) - t(j-1)}, & t(j-1) \leq t \leq t(j) \\ \Delta i_{t(1)} \times \frac{t(2) - t}{t(2) - t}, & t(j) \leq t \leq t(j+1) \\ 0, & t > t(j+1) \end{cases}
 \end{aligned} \tag{2.99}$$

para $j = 2, 3, \dots, m-1$, e

$$l(t, t(m)) = \begin{cases} 0, & t < t(m-1) \\ \Delta i_{t(m)} \times \frac{t - t(m-1)}{t(m) - t(m-1)}, & t(m-1) \leq t \leq t(m) \\ \Delta i_{t(m)}, & t > t(m) \end{cases}$$

De (2.99) é directo que um choque na taxa de juro à vista para um determinado prazo afecta apenas os cash flows à volta do mesmo.

2.6 Outras abordagens

Uma vez que um choque na taxa de juro à vista para uma determinada maturidade no modelo parcial afecta apenas os cash flows à volta da mesma, Johnson e Meyer (1989) apresentam uma metodologia de duração parcial baseada nas taxas futuras. Nesta, cada taxa futura afecta o valor presente de todos os cash flows durante e após essa maturidade, dado que $i(0, t) = \frac{1}{t} \int_0^t f(z) dz$.

Uma das principais limitações dos modelos apresentados ao longo deste capítulo é que estes não modelam explicitamente a informação histórica dos choques na EPTJ.

Assim, para ultrapassar esta limitação, o modelo de duração de componentes principais considera para a duração e convexidade as variâncias e co-variâncias na altura, inclinação e curvatura dos choques na EPTJ. No entanto, dada a natureza estática do modelo, pressupõe a existência de estacionaridade na estrutura das co-variâncias. Logo, se a hipótese não se verificar, o modelo é ineficaz para explicar a volatilidade futura dos choques afectando assim a sua capacidade de imunização.

Outra abordagem possível para os modelos de duração é modelizar uma estrutura dinâmica para a taxa de juro instantânea (*instantaneous short rate*). A função-preço

passa a ser função desta estrutura, da qual se obtém os parâmetros de risco, duração e convexidade estocástica, respectivamente. A modelização inclui, normalmente, uma componente determinística com reversão, isto é, uma componente que “força” a convergência da taxa instantânea para o seu valor de equilíbrio, e uma componente de difusão, veja-se Wu (2000).

Para um *survey* bastante completo sobre modelos de imunização veja-se Jorge M. Bravo (2001).

Capítulo 3 - Modelos de duração para activos com cash flows incertos

Nos dois capítulos anteriores foram apresentadas modelizações para o risco de taxa de juro, partindo do pressuposto que os cash flows eram fixos. Ou seja: independentes da EPTJ, livres de opções e sem risco de crédito. Estas características permitem que facilmente se encontre uma solução fechada para a função-preço e, consequentemente, as respectivas derivadas para o cálculo da duração e convexidade.

No entanto, tendo em conta a necessidade de diversificação do investimento, é importante que se analise o risco de taxa de juro para activos cujos cash flows são incertos.

Assim, na primeira parte do presente capítulo, apresenta-se um modelo de duração para obrigações de cupão variável, nomeadamente obrigações com opção de *call*, obrigações com opção de *put* e obrigações de cupões indexados com *cap* (valor máximo para a taxa de cupão).

Com estes activos não é possível obter-se uma forma fechada e determinística para a função-preço; logo, é necessário recorrer à sua modelação através de um modelo de opção-preço. Kalotay, Williams e Fabozzi (1993) propõem um modelo baseado no modelo binomial das taxas de juro.

Na segunda parte do capítulo serão abordados alguns modelos de duração para se estimarem os efeitos de um choque na EPTJ em acções, ou num índice de acções.

Deve, no entanto, adiantar-se que não existe consenso sobre a forma de estimar a duração para estes activos, havendo diversas abordagens que produzem estimativas bastante díspares. O primeiro modelo apresentado denomina-se modelo de desconto de dividendos, (MDD). Esta abordagem atribui uma taxa de crescimento constante aos dividendos futuros do activo e uma única taxa de desconto. A função-preço é dada pelo

valor presente dos cash flows descontados à taxa única e a duração obtém-se de modo análogo ao cálculo da duração modificada. Dado o poder explicativo que é atribuído à taxa de desconto na função-preço da acção, este modelo tende a sobrestimar a sensibilidade das acções à mesma.

Segue-se o modelo empírico de Leibowitz (1986). Este tem como base um simples modelo de correlação que procura uma evidência empírica entre os choques nas taxas de juro e a cotação das acções/mercado de acções. Devido à sua especificação, o modelo tende a subestimar o poder explicativo das taxas de juro na função-preço das acções.

Dado que os resultados obtidos entre estes dois modelos são bastante diferentes, Leibowitz *et al.* (1989) definem uma equação diferencial para a duração das acções, no sentido de resolver o paradoxo resultante da discrepância entre os resultados obtidos entre o modelo de descontos de dividendos e o modelo empírico.

Por fim, apresenta-se o modelo *equity duration S&P 500*, proposto por Blitzler e Dash (2004).

3.1 Medidas de Duração e Convexidade para obrigações com opções embutidas

Variações na EPTJ poderão alterar o valor esperado dos cash flows de obrigações com opções embutidas. Por conseguinte, a função-preço para estes activos terá de ser obtida através de um modelo de opção-preço (*option pricing model*), que deverá ter em conta a volatilidade das taxas de juro, uma vez que esta influencia o exercício das opções. A qualidade da estimativa depende, evidentemente, da fiabilidade do modelo escolhido para se valorizar a obrigação. A duração e a convexidade para este tipo de activos denominam-se duração efectiva e convexidade efectiva, respectivamente.

3.1.1 Construção da Árvore Binomial das taxas futuras

Kalotay, Wiliams e Fabozzi (1993) apresentam uma forma prática (ilustrando um exemplo numérico) de se estimar a duração efectiva para obrigações de cupão variável, através da construção de uma árvore binomial, que traduz a evolução aleatória das taxas futuras (*forward rates*), tendo em conta a sua volatilidade e a impossibilidade de arbitragem para uma obrigação de cupão fixo de um determinado emissor. As taxas são obtidas de forma iterativa e serão usadas para descontar os respectivos cash flows incertos produzidos pelo modelo. Uma vez definido o valor teórico de uma obrigação de cupão variável, determina-se o *spread* constante (*spread* de opção-ajustado) que, quando acrescentado às taxas futuras, iguala esse mesmo valor ao seu valor de mercado. O valor teórico da obrigação e do *spread* são elementos necessários para se determinar a duração efectiva e a convexidade efectiva.

Note-se ainda que a árvore representa uma discretização de um processo estocástico contínuo das taxas futuras a um ano, onde esta segue uma distribuição lognormal com uma certa volatilidade.

A seguinte figura representa um exemplo de uma árvore binomial de 3 passos para as taxas futuras anuais.

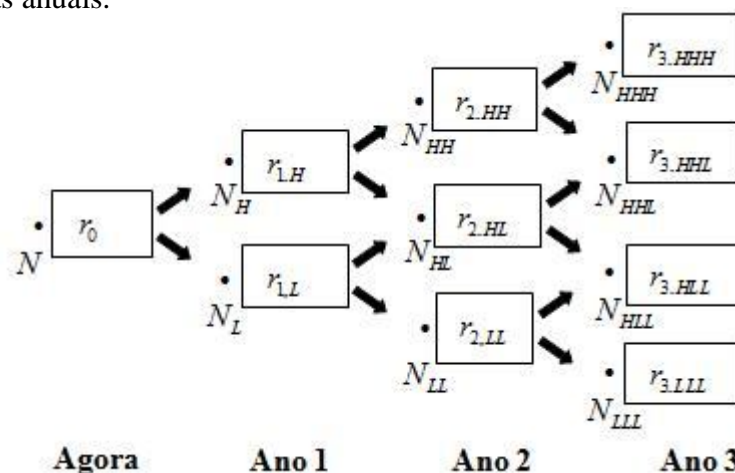


Figura 3.1 - Árvore binomial a três anos das taxas futuras anuais.

(Fonte: Kalotay *et al* (1993) p. 38)

- O modelo considera apenas dois valores (cenários) possíveis para a taxa de juro do período seguinte.
- Para uma dada volatilidade, a probabilidade da taxa de juro seguir um ou outro valor é a mesma, ou seja, $1/2$.

Cada nodo representa um período de um ano em relação ao nodo à sua esquerda. Este está identificado com um N cujo índice identifica o trajecto seguido pela taxa. O índice L representa o nodo de menor valor das duas taxas anuais possíveis do período, e H o de maior. Note-se que $N_{LH} = N_{HL}$, $N_{LLH} = N_{HLL}$, etc; isto é, trata-se de uma *recombining tree*.

O primeiro nodo representa o ponto de partida do processo, em que r_0 é conhecido e representa a taxa de juro anual à vista.

Para obter as taxas futuras da Figura 3.1 é necessário, em primeiro lugar, saber como se determina o valor de uma obrigação de cupão fixo de um determinado emissor em cada nodo.

Este valor depende do valor esperado dos cash flows futuros que, por sua vez, depende do cupão libertado no período seguinte, conhecido, e do valor da obrigação no período seguinte, que é aleatório.

No entanto, o valor da obrigação no nodo seguinte já vai depender da taxa futura anual desse mesmo período. De modo a ilustrar como se obtém o valor de uma obrigação num determinado nodo, consideram-se as seguintes variáveis.

P^* = valor da obrigação no nodo em questão.

P_H = valor da obrigação no ano seguinte, se a taxa de juro a um ano nesse mesmo período for a taxa superior.

P_L = valor da obrigação no ano seguinte, se a taxa de juro a um ano nesse mesmo período for a taxa inferior.

c = valor do cupão no período seguinte.

r^* = taxa de juro anual no nodo em questão.

A figura seguinte ilustra as variáveis acima definidas

$$\bullet P^* = \frac{1}{2} \left[\frac{P_H + c}{1 + r^*} + \frac{P_L + c}{1 + r^*} \right] \begin{matrix} \nearrow \bullet P_H + c \\ \searrow \bullet P_L + c \end{matrix}$$

Figura 3.2 - Cálculo do valor de uma obrigação num determinado nodo

Como o cálculo do valor da obrigação num determinado nodo depende dos dois valores (possíveis) da obrigação em cada um dos nodos seguintes, o cálculo do valor presente é obtido de forma recursiva. Assim, começa-se pelo último nodo, onde P_H e P_L são iguais ao valor nominal da obrigação (considerando que o reembolso do capital é de 100% no último ano), tendo-se em conta que todas as taxas de um determinado ano, podem ser escritas em função da taxa mais baixa (*lower rate*) desse mesmo ano.

Para o primeiro ano, os autores definem a relação entre $r_{1,L}$ e $r_{1,H}$ da seguinte forma

$$r_{1,H} = r_{1,L} e^{2\sigma}, \quad (3.1)$$

com σ = desvio-padrão (volatilidade) da taxa futura anual.

Para o segundo ano tem-se

$$r_{2,HH} = r_{2,LL} e^{4\sigma} \quad \text{e} \quad r_{2,HL} = r_{2,LL} e^{2\sigma}. \quad (3.2)$$

No terceiro ano existem 4 valores possíveis para a taxa anual, cuja relação é dada por

$$r_{3,HHH} = r_{3,LLL} e^{6\sigma}; r_{3,HHL} = r_{3,LLL} e^{4\sigma}; r_{3,HLL} = r_{3,LLL} e^{2\sigma}, \quad (3.3)$$

e assim sucessivamente.

Embora o resultado em (3.1) não seja demonstrado no artigo apresentado por Kalotay *et al.* este é uma consequência directa do modelo binomial apresentado por Cox, Ross e Rubinstein (1979), onde a volatilidade σ de um activo é definida de modo que $\sigma\sqrt{\Delta t}$ seja o seu desvio padrão para um curto intervalo de tempo Δt , veja-se Hull (2006).

Considere-se, então, que o activo em questão poderá assumir um de dois valores no período seguinte: um valor u , com probabilidade $1/2$, e um valor d , com igual probabilidade $u > d$. Assim sendo,

$$\frac{1}{2}(u^2 + d^2) - \left(\frac{1}{2}(u + d)\right)^2 = \sigma^2 \Delta t, \quad (3.4)$$

tendo em conta que a variância de uma variável aleatória Q é dada por $E[Q^2] - E[Q]^2$.

Seja

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \quad (3.5)$$

$$e \quad d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}; \quad (3.6)$$

no limite ($\Delta t \rightarrow 0$), tem-se

$$u = 1 + \sigma\sqrt{\Delta t} + \frac{1}{2}\sigma^2 \Delta t \quad (3.7)$$

$$e \quad d = 1 - \sigma\sqrt{\Delta t} + \frac{1}{2}\sigma^2 \Delta t. \quad (3.8)$$

Substituindo (3.7) e (3.8) em (3.4), a igualdade é verificada. Assim, para um período de tempo infinitesimal, (3.5) e (3.6) são solução para (3.4), de onde resulta a seguinte relação:

$$u = de^{2\sigma\sqrt{\Delta t}}. \quad (3.9)$$

Se Δt representar um período, vem

$$u = de^{2\sigma}. \quad (3.10)$$

Embora o modelo binomial para as taxas futuras anuais defina r_{1L} iterativamente (ver o ponto seguinte), de modo a que o preço da obrigação iguale o seu valor de mercado, esta iteração é feita tendo em conta a relação definida em (3.1).

Seguindo o mesmo raciocínio, para os dois períodos seguintes, verifica-se (3.2) e (3.3).

Note-se ainda que se considerou σ constante ao longo do processo; no entanto, o modelo é directamente extensível a volatilidades não constantes, σ_t . Fabozzi (1999) sugere a utilização do modelo GARCH para a estimação de volatilidades dependentes do tempo.

Por fim, recorrendo à hipótese de ausência de arbitragem, determinam-se as taxas da Figura 3.1.

Uma vez que a hipótese de ausência de arbitragem implica que a árvore tem de ser calibrada de modo que o valor presente de uma obrigação de cupão fixo iguale o seu valor de mercado, é necessário obter um conjunto de obrigações de maturidades crescentes de um determinado emissor.

Ilustra-se a seguir o processo descrito acima.

Considere-se o seguinte quadro de obrigações de cupão fixo de periodicidade anual de um determinado emissor.

Maturidade da obrigação	Valor do cupão	Valor de mercado	Valor Nominal	Taxa de juro à vista
1	c_1	P_1	V_1	$i(0,1)$
2	c_2	P_2	V_2	$i(0,2)$
3	c_3	P_3	V_3	$i(0,3)$
4	c_4	P_4	V_4	$i(0,4)$

Tabela 3.1 - Obrigações e taxas de juro à vista

Começando pelo nodo inicial N da Figura 3.1, tem-se o valor conhecido $r_0 = i(0,1)$.

Logo é evidente que $(c_1 + V_1)/(1+i(0,1)) = P_1$.

De seguida, as taxas futuras do ano 1, do emissor em questão, são obtidas em função de P_2 do seguinte modo:

Selecciona-se uma taxa arbitrária para $r_{1,L}$; dada a relação (3.1), obtém-se então uma taxa arbitrária para $r_{1,H}$. Usando o método descrito na Figura 3.2, determina-se o valor presente dos cash flows gerados pela obrigação P_2 . Se este não corresponder a P_2 , então, selecciona-se outra taxa para $r_{1,H}$, até que o valor de P_2 obtido pelo modelo iguale ao seu valor de mercado (a taxa $r_{1,L}$ é facilmente obtida utilizando a ferramenta “atingir objectivo” do *Excel*). Assim, tem-se

$$P_2 = \frac{1}{2} \left\{ \frac{P_2(N_H) + c_2 + P_2(N_L) + c_2}{1 + r_0} \right\}, \quad (3.11)$$

$$\text{com } P_2(N_H) = \frac{(V_2 + c_2)}{1 + r_{1,H}} \text{ e } P_2(N_L) = \frac{(V_2 + c_2)}{1 + r_{1,L}}.$$

Uma vez calculados os valores de $r_{1,L}$ e $r_{1,H}$, determinam-se as taxas do ano 2 da Figura 3.1 usando o preço P_3 , tendo em conta a relação (3.2) e recorrendo novamente à impossibilidade de arbitragem do modelo binomial. Vem

$$P_3 = \frac{1}{2} \left\{ \frac{P_3(N_H) + c_3 + P_3(N_H) + c_3}{1 + r_0} \right\}, \quad (3.12),$$

com

$$P_3(N_H) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{P_3(N_{HH}) + c_3 + P_3(N_{HL}) + c_3}{1 + r_{1,H}} \right\}, \quad (3.13)$$

$$P_3(N_L) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{P_3(N_{HL}) + c_3 + P_3(N_{LL}) + c_3}{1 + r_{1,L}} \right\} \quad (3.14)$$

$$e \quad P_3(N_{HH}) = \left\{ \frac{V_3 + c_3}{1 + r_{1,HH}} \right\}; \quad P_3(N_{HL}) = \left\{ \frac{V_3 + c_3}{1 + r_{1,HL}} \right\} \text{ e } P_3(N_{LL}) = \left\{ \frac{V_3 + c_3}{1 + r_{1,LL}} \right\}. \quad (3.15)$$

Para as taxas do ano 3 aplica-se o mesmo raciocínio, e assim sucessivamente.

Como o cálculo da duração e convexidade implica sempre a determinação do valor presente do activo, apresenta-se de seguida, a aplicação do modelo binomial na avaliação de diversas obrigações.

3.1.2 Avaliação de uma obrigação de cupão fixo livre de opções

A avaliação para este tipo de obrigação segue directamente o método descrito no ponto anterior, uma vez obtidas as taxas futuras do emissor, como seria de esperar. O valor da obrigação P_4 , obtido pelo modelo binomial, será idêntico ao valor dos seus cash flows descontados às taxas de juro à vista.

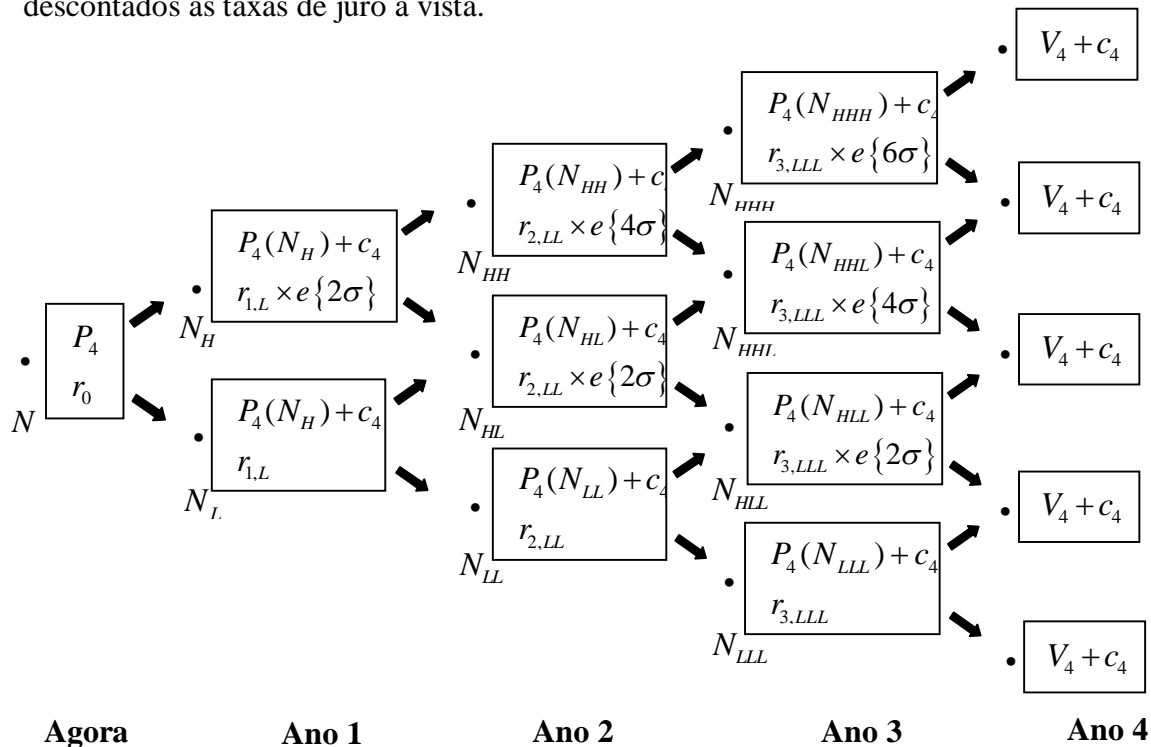


Figura 3.3 - Árvore binomial de uma obrigação livre de opções

3.1.3 Avaliação de uma obrigação com opção *call*

Relembrando, uma opção *call* implica o direito, mas não a obrigatoriedade, do emitente amortizar o principal num período determinado, pondo fim ao contrato subjacente.

O cálculo segue o mesmo método do ponto anterior; no entanto, quando a opção *call* puder ser exercida pelo emitente, o valor da obrigação no(s) respectivo(s) nodo(s) terá de reflectir o menor valor entre a aplicação da fórmula recursiva e o valor da *call* (normalmente igual ao valor nominal).

A opção de se exercer a *call* depende essencialmente de uma análise económica levada a cabo pelo emitente. É evidente que se numa determinada altura as taxas estiverem significativamente baixas, em comparação à da obrigação emitida, então o emitente terá um incentivo para exercer a sua opção.

3.1.4 Avaliação de uma obrigação com opção *put*

Relembrando, uma opção *put* implica o direito, mas não a obrigatoriedade, do detentor do título receber o principal num período determinado, pondo fim ao contrato subjacente.

O cálculo segue o mesmo método do ponto anterior; no entanto, quando a opção *put* puder ser exercida pelo detentor do título, o valor da obrigação no(s) respectivo(s) nodo(s) terá de reflectir o maior valor entre a aplicação da fórmula recursiva e o valor da *put* (normalmente, igual ao valor nominal).

A opção de se exercer a *put* depende essencialmente de uma análise económica levada a cabo pelo detentor do título. Assim, se numa determinada altura as taxas estiverem

significativamente elevadas em comparação à da obrigação emitida, então o investidor terá um incentivo para exercer a sua opção.

3.1.5 Avaliação de uma obrigação de cupões indexados com *cap*

Nas obrigações indexadas, a taxa de cupão em cada período é determinada por uma fórmula denominada fórmula do cupão, que será igual à soma de uma taxa de juro de referência com um *spread* (geralmente, pré-determinado). Por sua vez, a taxa de referência é função de um índice de referência. Note-se que a taxa de referência de um determinado cupão já está determinada a partir do momento em que existe contagem de juros corridos; portanto, na data de emissão, a taxa do primeiro cupão já é conhecida. Normalmente, a taxa de cupão dos cupões seguintes é definida dois dias úteis antes da contagem de juros corridos. No entanto, também existem obrigações indexadas cuja taxa de referência só é revista de x em x cupões. A data a partir da qual se define uma nova taxa de cupão denomina-se *coupon reset date*.

As obrigações indexadas evidenciam menos sensibilidade a variações nas taxas de juro do que as obrigações de cupão fixo, pois costuma existir uma correlação positiva entre a EPTJ e a taxa de juro de referência; logo, com excepção do valor do principal e do valor do próximo cupão (no caso em que a periodicidade do *coupon reset* é igual à periodicidade dos cupões), os restantes cash flows estão positivamente correlacionados com EPTJ.

Generalizando a expressão (1.9), e pressupondo que a taxa de referência é definida na data do cupão anterior, vem

$$P_0 = \sum_{t=1}^T c_t(r_t) \times (1 + i_t)^{-t} + VN \times (1 + i_T)^{-T}, \quad (3.16)$$

em que $c_t(r_t)$ é o valor do cupão no período t , $r_t = r_t(i_{t-1})$ é taxa de referência do período t adicionado do respectivo *spread*, i_t é a taxa de desconto do período t e VN é o valor nominal da obrigação.

Tendo em conta o diferencial total, tem-se que

$$\frac{d}{di_t} P_0(i_1, i_2, \dots, i_T, r_0, r_1, \dots, r_{T-1}) = \frac{\partial P_0(\cdot)}{\partial i_t} + \frac{\partial P_0(\cdot)}{\partial r_{t+1}} \frac{dr_{t+1}}{di_t}, \quad (3.17)$$

com $t \neq T$; $\frac{dr_{j+1}}{di_t} = 0$, $j \neq t$ e $\frac{di_j}{di_t} = 0$, $j \neq t$.

Como se sabe, $\partial P_0 / \partial i_t < 0$, mas $\partial P_0 / \partial r_{t+1} \times dr_{t+1} / di_t > 0$.

Verifica-se assim que se, por um lado, um choque positivo (negativo) na EPTJ tem um efeito negativo (positivo) na função-preço, devido ao efeito de actualização dos cash flows, por outro lado, tem um efeito positivo (negativo), devido à sua correlação positiva com a taxa de cupão. Se a correlação for perfeita, então a soma (3.17) é normalmente bastante próxima de zero ou, pelo menos, pouco significativa. Note-se que o valor do próximo cupão é sempre fixo.

Quer isto dizer que, de todos os cupões, apenas o próximo evidencia risco de taxa de juro. Este pode ser visto como uma obrigação de cupão zero, que independentemente do tipo de choque, tem uma duração igual à sua maturidade.

Esta é a razão pela qual se assume frequentemente que a duração de uma obrigação indexada é igual ao tempo remanescente até ao próximo cupão. No entanto, é preciso ter-se especial atenção a esta afirmação, veja-se Geske (2004), uma vez que se tem de ter em conta o risco de taxa de juro do principal, que por sua vez pode ser visto como outra obrigação de cupão zero.

Outro aspecto que merece algum cuidado tem a ver com a hipótese da correlação perfeita entre as taxas de desconto do emitente e o índice de referência do cupão, pois se esta não for quase perfeita, então a soma (3.17) pode ser significativamente diferente de zero. Assumindo que a taxa de referência é definida na data de pagamento do cupão anterior, então, existe sempre um *gap* igual à periodicidade do cupão entre as duas taxas; logo, não se pode garantir que a correlação seja perfeita, e tenderá a ser tanto menor quanto maior for o *gap*.

Finalmente, as obrigações indexadas podem ainda ter um *cap*, ou um *floor*, ou ambos. Um *cap* (*floor*) é um valor máximo (mínimo) para a taxa de cupão, o que significa que a partir de (até) uma determinada taxa de desconto, todos os cash flows serão insensíveis à taxa de referência. A probabilidade de se atingir o *cap* ou o *floor* será tanto maior, quanto mais voláteis forem as taxas de referência.

As obrigações de cupões indexados têm uma opção embutida quando têm um *cap* (*floor*), que é efectivamente uma opção que o investidor (emitente) concede ao emitente (investidor).

Sem ter em conta os valores dos diversos cupões, o processo de avaliação deste tipo de obrigações, segundo o modelo binomial, é idêntico ao utilizado para as obrigações com opção de *call* e *put*.

De modo a obter-se o valor do cupão num determinado nodo, é necessário pressupor uma relação entre as taxas futuras produzidas pela árvore binomial e a taxa de referência.

Para ilustrar, suponha-se uma obrigação P_4 , indexada com um *cap* e tal que a taxa de referência de cada cupão é dada pela taxa futura produzida pela árvore no nodo anterior,

adicionada de um *spread* (onde $i(0,1) + \text{spread}$ será a taxa do primeiro cupão); então, o valor da obrigação no nodo N_{HH} , por exemplo, será dado pela seguinte expressão:

$$P_4(N_{HH}) = \left(\frac{1}{2} [P_4(N_{HHH}) + P_4(N_{HHL})] + \text{Min}\{r_{2,HH} + \text{spread}; \text{cap}\} \times V_4 \right) \frac{1}{1 + r_{2,HH}}. \quad (3.18)$$

Para o nodo N_H , por exemplo, vem

$$P_4(N_H) = \left(\frac{1}{2} [P_4(N_{HL}) + P_4(N_{HH})] + \text{Min}\{r_{1,H} + \text{spread}; \text{cap}\} \times V_4 \right) \frac{1}{1 + r_{1,H}}. \quad (3.19)$$

Para finalizar, acrescente-se que existem ainda outros tipos de obrigações de cupão variável, como por exemplo as obrigações estruturadas. Estas são obrigações cujos cupões têm uma fórmula pouco usual. A taxa de cupão poderá basear-se em índices financeiros ou em índices não financeiros. As que dependem de uma taxa de juro poderão, em princípio, ser avaliadas pelo modelo binomial, como por exemplo, um *step-up callable*, veja-se Fabozzi (2000).

Outro exemplo, são as *inverse-floaters*, cujas taxas de cupão são funções inversas do índice de referência.

3.1.6 Spread de opção-ajustado

Uma vez que as taxas futuras da Figura 3.1 são construídas tendo em conta a ausência de arbitragem em obrigações de cupão fixo sem opções embutidas, nada garante que o valor da obrigação com opção de *call*, *put* ou indexada obtida pela árvore binomial iguale o seu valor de mercado. O *spread* de opção-ajustado (SOA) é o *spread* constante que, uma vez adicionado a todas as taxas futuras da árvore binomial, faz com que o preço teórico da obrigação com opção embutida iguale o seu valor de mercado. Um SOA negativo significa que o valor de mercado é superior ao valor teórico e vice-versa.

Note-se que a volatilidade assumida pelo modelo influencia o valor do SOA. Para um dado valor de mercado, quanto maior for a volatilidade, menor será o SOA de uma obrigação com opção *call* e maior será o SOA de uma obrigação com opção *put*. Outro aspecto importante tem a ver com o modo como a árvore das taxas futuras foi construída. Por exemplo, se as taxas futuras da Figura 3.1 fossem obtidas recorrendo à *default free term structure* isto é, igualando o valor produzido pela árvore binomial de uma obrigação de cupão fixo sem opções ao valor presente dos seus cash flows, descontados às taxas de juro à vista produzidas pelas Obrigações do Tesouro, então o SOA captaria o risco de crédito.

3.1.7 Duração efectiva e convexidade efectiva

Sendo Δy uma variação pequena nas taxas de juro à vista do emitente, $\Delta y > 0$, então, tal como no Capítulo 1, podem definir-se as seguintes estimativas para a duração e convexidade, respectivamente, (veja-se Kalotay *et al* 1993):

$$D = -\frac{P_+ - P_-}{2P_0\Delta y} \text{ e } C = \frac{P_+ + P_- - 2P_0}{(\Delta y)^2 P_0}, \quad (3.20)$$

em que P_0 é o valor presente da obrigação obtido pelo modelo binomial. As expressões são equivalentes às estimativas propostas em (1.60) e (1.61).

O facto de a expressão resultar na duração efectiva/convexidade efectiva advém do facto de se considerar que os cash flows são sensíveis a Δy .

De forma a obter-se P_+ no modelo binomial, é necessário:

1. Calcular o SOA para o emissor em questão.
2. Adicionar Δy às taxas de juro à vista.

3. Construir uma árvore binomial de taxas futuras com base nas taxas de juro à vista obtidas no ponto anterior.
4. Adicionar a cada uma das taxas da árvore o SOA, de modo a obter uma árvore “ajustada”.
5. Usar a árvore “ajustada” do ponto anterior, de modo a calcular recursivamente o valor presente da obrigação (que será P_+).

Para se obter P_- procede-se exactamente do mesmo modo; no entanto, no segundo ponto, subtrai-se Δy em vez de se adicionar.

Kalotay, Williams e Fabozzi reconhecem que para se implementar o modelo são precisos “*several refinements*”, nomeadamente, os espaços entre os nodos terão de ser bem inferiores a um ano, pois sendo o modelo uma discretização de um processo contínuo, a relação entre a taxa inferior de um determinado período e as restantes do mesmo período será tanto mais realista quanto maior for o número de passos (nodos) para um dado intervalo temporal, o que implica alguns desafios em termos computacionais. Outras dificuldades práticas referidas pelos autores incluem a gestão dos cash flows que se situam entre dois nodos.

Ademais, tanto o valor presente da obrigação como o valor do SOA obtido pelo modelo binomial manifestam uma sensibilidade elevada em relação a σ . Deste modo, Fabozzi (1999) considera que a estimativa da volatilidade das taxas é um dos principais riscos de modelação.

Existem ainda vários modelos na literatura em tempo contínuo de avaliação de obrigações variáveis, em que se atribui uma forma funcional estocástica à EPTJ, de modo a obter o valor esperado da obrigação numa determinada data e, consequentemente, o valor das suas opções. A implementação numérica destes métodos

passa muitas vezes na discretização do processo através da construção de árvores binomiais e/ou trinomiais. Veja-se por exemplo Nawalkha *et al.* (2007).

Reitano (1989) sugere como alternativa que se estime o valor esperado dos cash flows (sem especificar um método) de obrigações com opções embutidas. Uma vez obtidas as estimativas, estas podem ser tratadas como sendo de uma obrigação de cupão fixo, livre de opções e sem risco de crédito. Salienta ainda que a qualidade dos parâmetros, duração efectiva e convexidade efectiva, dependem inteiramente da fiabilidade do modelo opção-preço escolhido.

3.2 Modelos de duração de acções

Embora os modelos de duração sejam aplicados, na sua grande maioria, às obrigações, é importante (tendo em conta a diversificação do investimento) que se analise o risco de taxa de juro em outros tipos de activos.

Nas últimas duas décadas têm surgido modelos para se estimar os efeitos de um choque EPTJ nas acções e/ou num índice de acções.

Blitzer e Dash (2004) argumentam que se deverá incluir o mercado de acções no processo de imunização, pois (apesar da volatilidade que o caracteriza) apresentam no longo prazo rendibilidades significativamente superiores às do mercado de obrigações.

Embora não haja um modelo de duração de acções geralmente aceite entre os académicos e profissionais, a Standard & Poors publica todos os anos a sua estimativa da duração do S&P 500.

3.2.1 Modelo de descontos de dividendos de Gordon

Gordon (1962) define um modelo de duração para acções em que o dividendo presente do título, d_0 , cresce perpetuamente a uma taxa constante g , e a taxa de taxa de desconto dos dividendos, k , também se mantém constante. Note-se que k deverá ser igual à *free term structure of interest rate* adicionada de um *spread* de risco.

Nestas condições, o preço presente teórico da acção define-se

$$P = d_0 \sum_{t=1}^{\infty} \left(\frac{1+g}{1+k} \right)^t. \quad (3.21)$$

Com $g > 0$ e $k > g$, vem

$$P = d_0 \frac{1+g}{k-g}. \quad (3.22)$$

A duração no modelo de descontos de dividendos, D_{MDD} , é dada por

$$D_{MDD} = -\frac{\partial \ln P}{\partial k} = -\frac{\partial P}{\partial k} \frac{1}{P} = \frac{1}{k-g}. \quad (3.23).$$

No contexto de capitalização e pagamento de dividendos contínuos tem-se

$$P = \int_0^{\infty} d_0 e^{(g-k)t} dt = \frac{d_0}{k-g}. \quad (3.24)$$

e

$$D_{MDD} = -\frac{\partial \ln P}{\partial k} = -\frac{\partial P}{\partial k} \frac{1}{P} = \frac{1}{k-g}. \quad (3.25)$$

Assim, independentemente de se considerar a função-preço dada pela expressão (3.21), ou a função-preço dada por (3.24), tem-se sempre que $D_{MDD} = (k-g)^{-1}$; logo, a variação percentual infinitesimal da acção no modelo de descontos de dividendos de Gordon é dada por

$$\frac{\partial P}{P} = -\partial k (k-g)^{-1} \quad (3.26)$$

Dado o poder explicativo que é atribuído à taxa de desconto na função-preço da acção, este modelo tende a sobrestimar a sensibilidade das acções à mesma. Assumir que

$$\frac{\partial g}{\partial k} = 0 \text{ e que tanto } g \text{ como } k \text{ se mantêm perpetuamente constantes constituem fortes}$$

limitações do modelo.

3.2.2 Modelo Empírico de Leibowitz

Leibowitz (1986), enquadrado numa perspectiva de duração total de uma carteira constituída por obrigações e acções, apresenta um modelo empírico para a duração das acções.

Uma vez que a rendibilidade das obrigações está fortemente correlacionada com os choques nas taxas de juro e que a correlação entre a rendibilidade de obrigações e o mercado de acções é não nula, pode definir-se uma relação entre as taxas de juro e a rendibilidade das acções.

Para este efeito, Leibowitz analisou os dados da *S&P 500* e da *Salomon Brothers Broad (SBB)* entre 1980 e 1985, concluindo que, apesar da volatilidade da correlação das rendibilidades entre os dois índices, houve períodos de relativa estabilidade entre 1981 e 1983, evidenciando-se então uma correlação positiva.

O modelo é construído numa óptica de *Capital Asset Pricing Model (CAPM)*, podendo por isso ser utilizado também em problemas de afectação de investimentos de forma semelhante.

O co-movimento entre a rendibilidade do mercado de acções (*equities*), R_E , e a rendibilidade do mercado de obrigações, R_B , é expresso da seguinte forma

$$\tilde{R}_E - R_F = A_1 + \beta (\tilde{R}_B - R_F) + \tilde{e}_1, \quad (3.27)$$

onde R_F é a taxa de juro sem risco, β é o coeficiente de regressão linear obtido pelo método dos mínimos quadrados ordinários, isto é,

$$\beta = \frac{\sigma_E}{\sigma_B} \times \rho(R_E, R_B) \quad (3.28)$$

e $\tilde{\epsilon}_1$ concentra os outros factores explicativos de \tilde{R}_E , com $E[\tilde{\epsilon}_1] = 0$ e $E[\tilde{\epsilon}_1 \times \tilde{R}_B] = 0$.

Como *proxy* para os choques na EPTJ é proposta a variação na rendibilidade da Obrigação do Tesouro dos EUA a 10 anos, representada por $\tilde{\delta}$.

A relação linear entre \tilde{R}_B e $\tilde{\delta}$ é dada por

$$\tilde{R}_B - R_F = A_2 - D_B \tilde{\delta} + \tilde{\epsilon}_2, \quad (3.29)$$

onde D_B é a duração do mercado de obrigações e $\tilde{\epsilon}_2$ representa outros factores explicativos de \tilde{R}_B , ou seja, deslocações não paralelas na EPTJ. Note-se que se considera $E[\tilde{\epsilon}_2] = 0$ e $E[\tilde{\delta} \times \tilde{\epsilon}_2] = 0$.

Substituindo as expressões (3.28) e (3.29) em (3.27), obtém-se directamente

$$\tilde{R}_E - R_F = A_3 - \frac{\sigma_E}{\sigma_B} \rho(R_E, R_B) D_B \tilde{\delta} + \tilde{\epsilon}_3, \quad (3.30)$$

com $A_3 = A_1 + \beta A_2$ e $\tilde{\epsilon}_3 = \beta \tilde{\epsilon}_2 + \tilde{\epsilon}_1$.

A partir de (3.30), Leibowitz define a duração empírica das acções, D_E , como

$$D_E = \frac{\sigma_E}{\sigma_B} \times \rho(R_E, R_B) D_B. \quad (3.31)$$

Considera-se que \tilde{R}_E é independente de choques não paralelos, de modo que $E[\tilde{\epsilon}_1 \times \tilde{\epsilon}_2] = 0$, e que os efeitos de choques paralelos no mercado de acções são suficientemente captados por R_B , de forma que $E[\tilde{\delta} \times e_1] = 0$. As duas hipóteses permitem assumir que $E[\tilde{\delta} \times e_3] = 0$.

Leibowitz (1986) p. 29 reconhece que: “*it should be noticed that the assumptions are nontrivial (...) changing short to long term rate spreads could have a direct impact on stock market behavior*”.

Blitzer e Dash (2004) estimaram a duração do índice S&P 500 em meados de 2003, recorrendo ao modelo empírico de Leibowitz. Usando os dados de 1973 a 2003, estimam uma duração para o índice de 2,32 anos. Esta duração vem, no entanto, subestimada, uma vez que β se encontra presente tanto no termo constante de (3.30) como no coeficiente de $\tilde{\delta}$, introduzindo multicolinearidade no modelo.

3.2.3 Abordagem diferencial total

Leibowitz *et al* (1989) definem uma equação diferencial para a duração das acções, no sentido de resolver o paradoxo resultante da discrepância entre os resultados obtidos entre o modelo de desconto de dividendos e o modelo empírico proposto pelo próprio em 1986. Usando uma abordagem de descontos de dividendos, os autores consideram a interdependência entre a taxa de crescimento dos dividendos e a taxa de desconto, diferenciando ainda os efeitos nesta última resultantes da taxa de juro nominal, da taxa de juro real e do prémio de risco.

Seja k a taxa de desconto, i a taxa de juro nominal e g a taxa de crescimento dos dividendos. Defina-se sucessivamente

$$k = i + h(I, r, \dots) \quad (3.32)$$

$$i = r + I \quad (3.33)$$

$$g = g_0 + \gamma r + \lambda I, \quad (3.34)$$

em que:

h = prémio de risco do mercado de acções;

r = componente real da taxa de juro nominal;

I = componente inflação da taxa de juro nominal;

g_0 = componente constante da taxa de crescimento de dividendos;

γ = coeficiente de sensibilidade da taxa de crescimento dos dividendos associada à taxa de juro real;

λ = parâmetro *flow through* da inflação, isto é, proporção da inflação que pode ser transferida para a taxa de crescimento dos dividendos.

A equação diferencial total é dada por

$$\frac{dP}{P} = -D_{MDD} \left(1 - \gamma + \frac{\partial h}{\partial r} \right) dr - D_{MDD} \left(1 - \lambda + \frac{\partial h}{\partial I} \right) dI, \quad (3.35)$$

onde $D_{MDD} = (k - g)^{-1}$ e $P = d_0 (k - g)^{-1}$.

O primeiro termo de (3.35) representa a sensibilidade da função preço, face a variações na taxa de juro real, e o segundo termo representa a sensibilidade da função preço, face a variações na inflação.

A função preço é em circunstâncias normais mais sensível a dr do que a dI , pois considera-se que $\lambda > 0$ (enquanto γ poderá ser negativo).

O modelo de Gordon ignora as relações (inter-dependência) existentes entre a inflação, as taxas de juro e a taxa de crescimentos dos dividendos. A teoria económica diz que o aumento da inflação poderá levar ao aumento das taxas de juro. No entanto, as empresas poderão fazer passar parte da inflação no aumento dos preços dos seus bens e serviços. Neste contexto, é necessário distinguir entre choques na taxa de juro nominal e choques na taxa de juro real e os seus efeitos em g . Além do mais, o aumento das taxas de juro irá influenciar o prémio de risco das acções, uma vez que estas provocam um aumento

da volatilidade nos mercados e um aumento na rendibilidade dos activos de cash flow fixos.

Os autores reconhecem a dificuldade de estimação dos parâmetros do modelo apresentado.

3.2.4 Modelo Standard & Poors

Apesar das diferentes abordagens no que diz respeito à quantificação da duração de acções, Blitzler e Dash (2004), num artigo publicado pela Standard & Poors, apresentam um modelo simples e de aplicação prática de estimação da duração do índice S&P500.

Os autores defendem a inclusão de acções no processo de imunização das responsabilidades de longo prazo, apresentando os seguintes argumentos:

- No longo prazo, a rendibilidade das acções é superior à das obrigações; logo, são um instrumento vital para se fazer face ao risco de longevidade, associado a muitos produtos do ramo vida, fundo de pensões e acidentes de trabalho.
- Pode combinar-se a duração das acções com a duração das obrigações, com o objectivo de se imunizar uma carteira.
- Em relação ao custo de gestão, um fundo passivo de acções comporta um custo de gestão semelhante ao de um fundo de obrigações e, em média, apresenta resultados não inferiores aos fundos de acções geridos de forma activa.

Considerando $P = \frac{d_0}{k - g}$, define-se a duração do índice S&P 500, D_{SP} , da seguinte

forma

$$D_{SP} = -\frac{\partial P}{\partial k} \frac{1}{P} = \frac{\left(1 - \frac{\partial g}{\partial k}\right)}{k - g} = D_{MDD} \left(1 - \frac{\partial g}{\partial k}\right). \quad (3.36)$$

Note-se que se $\partial g/\partial k > 0$, então $D_{SP} < D_{MDD}$.

O modelo pode ser visto como um caso particular do modelo apresentado no ponto anterior.

Propriedades *Ceteris Paribus*:

Propriedade 1: Quanto maior a taxa de crescimento das acções, maior a duração.

Propriedade 2: Com g constante, quanto maior k menor a duração das acções.

Propriedade 3: Quanto menor $\partial g/\partial k$ (sensibilidade da taxa de crescimento em relação à taxa de desconto) maior a duração, isto é $\partial g/\partial k$ funciona como um contra efeito, admitindo a primeira derivada positiva.

Os dados apresentados pela Standard & Poors em 2004 para o S&P 500 entre 1973 e 2003, onde k é dado pela *Moody's Baa yield series*, por questões práticas, g é a rendibilidade trimestral do índice S&P 500 e $\partial g/\partial k$ é a correlação entre ambas as variáveis, estima uma duração do índice S&P 500 em cerca de 15 anos. Valor bastante superior aos 2,32 anos obtido pelos mesmos, recorrendo ao modelo empírico de Leibowitz, o que evidencia a disparidade dos resultados entre estes modelos.

Um aspecto fundamental a ter em conta no que diz respeito à *equity duration* advém do facto do poder explicativo da EPTJ não ser o mesmo que se observa nos títulos de rendimento fixo. Assim, torna-se menos claro qual a sensibilidade face às taxas de juro. Outra questão importante prende-se com o facto de os modelos aqui apresentados ignorarem a questão de choques não paralelos.

Não existe, portanto, um modelo de duração de acções que seja geralmente aceite no meio académico ou profissional.

Em termos do projecto de Solvência II, nas especificações técnicas do QIS4 no ponto TS.IX.B.1 vem:

“Assets sensitive to interest rate movements will include fixed-income investments, insurance liabilities, and financing instruments (loan capital) and interest-rate derivatives”, ou seja, o QIS4 exclui as acções do risco de taxa de juro.

Capítulo 4 - Estimação da EPTJ

A EPTJ actual (sem risco) é, evidentemente, um *input* fundamental nos modelos apresentados anteriormente; no entanto, como se referiu no primeiro capítulo, esta não é directamente observável no mercado.

A sua estimação consiste em determinar as taxas de juro à vista, ou taxas futuras, ou a obtenção de funções de desconto a partir de um conjunto de obrigações livre de opções e sem risco de crédito. Note-se que, dada a relação entre as taxas de juro à vista e as taxas futuras, pode-se sempre obter umas em função das outras.

O primeiro método de estimação que se apresenta é o *Bootstrap*. Este método consiste em extrair de forma iterativa as rendibilidades do principal de uma sequência de obrigações de maturidades crescentes (com pagamento de cupões, livre de opções e sem risco de crédito), tendo em conta os seus preços de mercado e o princípio de ausência de arbitragem.

Esta metodologia apresenta, no entanto, algumas limitações, veja-se Choudrhy (2005), o que levou ao desenvolvimento de duas abordagens distintas: métodos paramétricos e métodos *spline*.

Os métodos paramétricos têm como objectivo modelizar a EPTJ atribuindo-lhe uma forma funcional.

Um *spline*, do ponto vista matemático, é um polinómio constituído por segmentos de polinómios individuais que estão unidos em determinados pontos, denominados *nós*, nos quais se garante a continuidade da primeira e segunda derivada. Destacam-se os *splines* de interpolação, *splines* de regressão e *smoothing splines*.

Independentemente do método, Nawalkha (2001) destaca quatro requisitos fundamentais:

1. O método terá de garantir um ajustamento adequado aos dados.
2. As taxas de juro à vista e futuras terão de permanecer positivas para todas as maturidades.
3. A função de desconto, a função das taxas de juro à vista e a função das taxas futuras deverão ser contínuas e “suaves”.
4. O método deverá permitir um comportamento assintótico para as taxas de longo prazo.

Choudrhy (2005) acrescenta ainda o aspecto da flexibilidade, isto é, a capacidade do método se ajustar às diversas configurações possíveis da EPTJ actual.

Termina-se o capítulo com uma breve referência à modelação dinâmica (evolução futura) da EPTJ.

Serão apresentados dois modelos de equilíbrio de factor único (com um único processo de difusão): o Modelo Vasicek e o modelo CIR.

Para uma leitura mais completa aconselha-se a consulta de Nawalkha *et al.* (2007) ou Brigo e Mercurio (2007).

4.1 Método *Bootstrap*

Como se referiu, o método *Bootstrap* consiste em extrair de forma iterativa as taxas de juro à vista, utilizando para esse efeito os valores de mercado de uma sequência de obrigações com pagamentos de cupões. Deste modo, requiere-se a existência de pelo menos uma obrigação cuja maturidade seja coincidente com a data do *Bootstrap*.

De modo a ilustrar o método, considere-se um conjunto de K obrigações, em que as maturidades equidistantes são dadas por t_1, t_2, \dots, t_K e os cupões apresentam a mesma periodicidade.

Seja,

$P(t_i)$ = preço da obrigação cuja maturidade é de t_i anos.

CF_{it_i} = total do cash flow gerado pela i -ésima obrigação na data t_i , com $i = 1, 2, \dots, K$

$y(t_i)$ = taxa de juro à vista capitalizado continuamente, de maturidade t_i .

Tendo em conta (1.8), o preço de uma obrigação cuja maturidade é t_1 (pressupondo que não existem cash flows intermédios) é dado por

$$P(t_1) = CF_{1t_1} \times e^{-y(t_1) \times t_1}, \quad (4.1)$$

do qual se obtém directamente

$$y(t_1) = \frac{1}{t_1} \ln [CF_{1t_1}]. \quad (4.2)$$

De modo a obter-se a taxa de juro à vista para o período seguinte, considere-se

$$P(t_2) = CF_{2t_1} \times e^{-y(t_1) \times t_1} + CF_{2t_2} \times e^{-y(t_2) \times t_2}, \quad (4.3)$$

onde CF_{2t_1} representa o primeiro cupão gerado pela obrigação de maturidade t_2 e CF_{2t_2} o valor do segundo cupão, adicionado do reembolso do capital. Uma vez que $y(t_1)$ é conhecida, tem-se que

$$y(t_2) = \frac{1}{t_2} \ln \left[\frac{CF_{1t_2}}{P(t_2) - CF_{1t_1}} \right]. \quad (4.4)$$

Seguindo o mesmo raciocínio sequencial iterativo, obtêm-se as taxas de juro à vista para as K maturidades.

De modo a obter-se uma solução directa, considere-se a seguinte abordagem matricial:

$$\begin{pmatrix} P(t_1) \\ P(t_2) \\ \vdots \\ P(t_K) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} CF_{1t_1} & 0 & \dots & 0 \\ CF_{2t_1} & CF_{2t_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ CF_{Kt_1} & CF_{Kt_2} & \dots & CF_{Kt_K} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d(t_1) \\ d(t_2) \\ \vdots \\ d(t_K) \end{pmatrix}, \quad (4.5)$$

em que $d(t_i) = e^{-y(t_i) \times t_i}$.

Dado que a matriz dos cash flows admite inversa, (pois trata-se de matriz triangular onde nenhum dos elementos da diagonal principal é zero), vem

$$\begin{pmatrix} d(t_1) \\ d(t_2) \\ \vdots \\ d(t_K) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} CF_{1t_1} & 0 & \dots & 0 \\ CF_{2t_1} & CF_{2t_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ CF_{Kt_1} & CF_{Kt_2} & \dots & CF_{Kt_K} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} P(t_1) \\ P(t_2) \\ \vdots \\ P(t_K) \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

As taxas de juro à vista que se encontram entre as datas do *Bootstrap* podem ser obtidas por interpolação linear ou cúbica (*cubic spline interpolation*).

Choudrhy (2005) destaca algumas limitações deste método, nomeadamente:

- As taxas entre as datas *Bootstrap* são obtidas por interpolação; logo, estas não têm em conta qualquer tipo de optimização.
- A improbabilidade de se obter um conjunto de obrigações que produzam cash flows com intervalos constantes durante um período suficientemente longo. Ou seja, o número de obrigações poderá não coincidir com o número das maturidades *Bootstrap*, o que obriga a alguns ajustamentos *ad-hoc*.
- Um terceiro aspecto advém do facto do método *Bootstrap* apresentar um excesso de ajustamento aos dados. Isto sucede porque o preço de mercado das obrigações inclui

um determinado nível de ruído (devido, por exemplo, aos diferentes níveis de liquidez e diferentes *spreads* de licitação e oferta (*bid-offer*) entre obrigações de curto e longo prazo, ao sistema fiscal, etc.). Consequentemente, apesar da curva das taxas de juro à vista (após a aplicação do método de interpolação) poder ter uma configuração relativamente “suave”, a respectiva curva das taxas futuras poderá apresentar uma oscilação excessiva.

4.2 Métodos Paramétricos

Os métodos paramétricos têm como objectivo modelizar a EPTJ atribuindo-lhe uma forma funcional.

No entanto, quando se atribui uma forma funcional à EPTJ é importante que esta seja suficientemente flexível, de modo a ajustar-se às configurações possíveis. Pois, apesar de em condições normais de mercado a EPTJ ser uma função crescente em relação à maturidade, (dado que os investidores apresentam uma preferência pela liquidez e aversão ao risco de taxa de juro), esta poderá apresentar diversas formas, veja-se Choudrhy (2004).

4.2.1 Modelo Nelson-Siegel

Nelson e Siegel (1987) sugerem uma parametrização parcimoniosa das taxas futuras, utilizando para esse efeito uma única função exponencial, dada por

$$f^{NS}(t) = \beta_0 + \beta_1 e^{-t/\alpha} + \frac{\beta_2}{\alpha} t e^{-t/\alpha}, \quad (4.7)$$

onde t é a variável tempo e β_0 , β_1 , β_2 e α são os parâmetros a estimar.

A expressão (4.7) implica a seguinte equação para as taxas de juro à vista:

$$y^{NS}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t f^{NS}(u) du = \beta_0 + (\beta_1 + \beta_2) \frac{\alpha}{t} (1 - e^{-t/\alpha}) - \beta_2 e^{-t/\alpha} \quad (4.8)$$

Uma das vantagens do modelo é que a função das taxas futuras apresenta um aspecto suave ao longo de todo o seu domínio. Outra vantagem é permitir que a EPTJ tenha um comportamento assintótico para as maturidades mais longas.

Uma vez que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f^{NS}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} y^{NS}(t) = \beta_0, \quad (4.9)$$

consequentemente, β_0 representa a taxa de longo prazo.

A taxa instantânea de curto prazo obtêm-se quando t tende para zero, isto é

$$\lim_{t \rightarrow 0} f^{NS}(t) = \lim_{t \rightarrow 0} y^{NS}(t) = \beta_0 + \beta_1. \quad (4.10)$$

Note-se ainda que:

- A diferença entre a taxa de longo prazo e a taxa instantânea de curto prazo é $-\beta_2$, que poderá ser interpretado como sendo a inclinação da EPTJ, tanto para as taxas futuras como para as taxas de juro à vista.
- β_2 afecta a curvatura da EPTJ. Com $\beta_2 > 0$, a EPTJ apresenta uma forma côncava e com $\beta_2 < 0$, uma forma convexa.
- $\alpha > 0$, representa a velocidade de convergência da estrutura em relação à taxa de longo prazo; assim, quanto menor o seu valor maior a velocidade de convergência.

A seguinte figura representa algumas configurações possíveis da EPTJ à vista obtidas pela expressão (4.8).

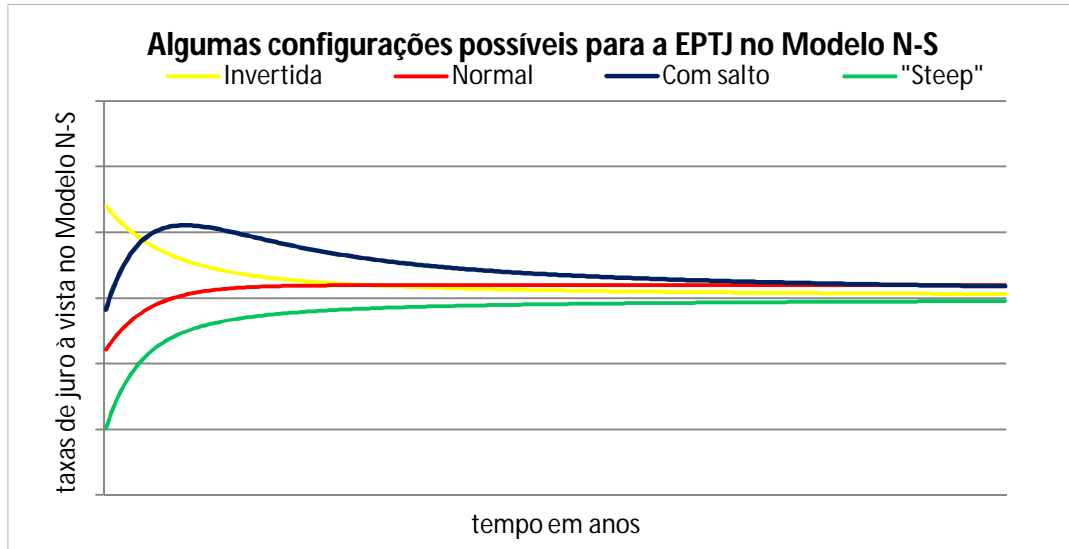


Figura 4.1 - Diversas configurações da EPTJ no modelo Nelson-Siegel

De modo a estimar-se os parâmetros, considere-se a função de desconto associada a (4.8)

$$d(t) = e^{-\beta_0 - (\beta_1 + \beta_2) \frac{\alpha}{t} (1 - e^{-t/\alpha}) + \beta_2 e^{-t/\alpha}}, \quad (4.11)$$

da qual se obtém a seguinte forma funcional para a função-preço de uma obrigação

$$P(t) = \sum_{t=1}^T CF_t e^{-\beta_0 - (\beta_1 + \beta_2) \frac{\alpha}{t} (1 - e^{-t/\alpha}) + \beta_2 e^{-t/\alpha}}, \quad (4.12)$$

onde T representa a maturidade da obrigação e CF_t o valor do cash flow da obrigação no momento t .

Seja ε_i a diferença entre o valor teórico da obrigação i obtido pela equação (4.12) e o seu valor de mercado; então, os parâmetros $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ e α podem ser obtidos minimizando a soma dos erros quadráticos, ou seja,

$$\underset{\beta_0, \beta_1, \beta_2, \alpha}{Min} \sum_{i=1}^K \varepsilon_i^2 \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} \text{s. a: } & \beta_0 > 0 \\ & \beta_0 + \beta_1 > 0 \\ & \alpha > 0 \end{aligned} \quad (4.14)$$

Dado que a função-preço não é linear, o processo de minimização requer a utilização de técnicas de optimização não lineares. Através da ferramenta *Solver* do Excel os parâmetros são facilmente estimados; no entanto, é necessário escolher cuidadosamente os valores de partida.

4.2.2 Modelo Svensson

O modelo Svensson é mais do que uma extensão do modelo anterior, em que a equação das taxas futuras é dada por

$$f^{Sv}(t) = f^{NS}(t) + \frac{\beta_3}{\lambda} t e^{-t/\lambda}. \quad (4.15)$$

O último termo de (4.15), ao introduzir mais dois parâmetros, adiciona flexibilidade à forma funcional de Nelson-Siegel. Note-se que o modelo é actualmente (2008) utilizado pelo Banco Central Europeu.

Sendo $y^{Sv}(t)$ as taxas de juro à vista no modelo de Svensson, vem

$$y^{Sv}(t) = y^{NS}(t) + \frac{\beta_3}{\alpha T} \int_0^T t e^{-t/\lambda} dt = y^{NS}(t) + \frac{\beta_3}{\alpha} \left[-\lambda e^{-T/\lambda} + \frac{\lambda^2}{T} (1 - e^{-T/\lambda}) \right]. \quad (4.16)$$

Um aspecto a ponderar é, no entanto, o resultado obtido por Anderson e Sleath (1999). Estes autores demonstram que nos métodos paramétricos (incluindo o modelo de Svensson) uma variação de uma taxa de juro à vista num extremo pode vir a ter um impacto significativo na função no extremo apostado, o que é claramente uma propriedade indesejável.

4.3 Métodos *spline*

Como já foi referido, um *spline* consiste num polinómio constituído por segmentos de polinómios individuais que estão unidos em determinados pontos (*nós*), nos quais se garante a continuidade da primeira e segunda derivadas.

Estas características permitem que a curva correspondente ao *spline* apresente um aspecto “suave” dando a “ilusão” de que se trata apenas de um único polinómio (de ordem superior).

As taxas de juro à vista obtidas pelo método *Bootstrap* podem servir como *nós* para a aplicação dos métodos *spline*, veja-se McCulloch (1971).

4.3.1 Interpolação por *spline* cúbico

Quando se pretende um ajustamento total às taxas observadas pelo método *Bootstrap* (obrigações ou taxas *swap*), as maturidades intermédias podem ser obtidas directamente através de interpolação por *spline* cúbico.

Interpolar por *spline* cúbico envolve a junção de polinómios de terceiro grau, de modo a que a função *spline* intercepte “suavemente” todos os pontos (da curva de rendimentos).

Define-se então um *spline* cúbico:

Considere-se que $\{(t_j, y_j) : j=0,1,...,K\}$ são $K+1$ pontos (*nós*) distintos em que $t_0 < t_1 < ... < t_K$. A função $f(t)$ é um *spline* cúbico se existirem n polinómios de terceiro grau com coeficientes a_j, b_j, c_j , e d_j a satisfizer as seguintes condições:

1. $f(t) = f_j(t) = a_j + b_j(t - t_j) + c_j(t - t_j)^2 + d_j(t - t_j)^3$, para $t_j \leq t \leq t_{j+1}$, $j = 0,1,...,K-1$,

ou seja, $f(t)$ é constituída por segmentos de polinómios de terceiro grau.

2. $f(t_j) = y_j$, com $j=0,1,...,K$, ou seja, o *spline* intercepta todos os pontos (*nós*).

3. $f_j(t_{j+1}) = f_{j+1}(t_{j+1})$, com $j = 0, 1, \dots, K-2$, isto é, o *spline* é uma função contínua nos nós interiores.
4. $f'_j(t_{j+1}) = f'_{j+1}(t_{j+1})$, com $j = 0, 1, \dots, K-2$, a primeira derivada do *spline* contínua nos nós interiores.
5. $f''_j(t_{j+1}) = f''_{j+1}(t_{j+1})$, com $j = 0, 1, \dots, K-2$, a segunda derivada do *spline* contínua nos nós interiores.

As condições 4 e 5 garantem que o *spline* é “suave” nos nós interiores.

Note-se que $n+1$ pontos dão origem a um segmento de n polinómios individuais, que por sua vez originam $4n$ coeficientes por determinar. Mas as condições de 2 a 5 implicam respectivamente $K+1$, $K-1$, $K-1$ e $K-1$ restrições, ou seja $4K-2$ no total. Assim, é necessário “impor” duas condições iniciais de modo a igualar o número de incógnitas ao número de equações.

Os coeficientes do *spline* cúbico são obtidos em função da segunda derivada dos polinómios individuais, pois assim o problema reduz-se a um sistema de equações lineares. Note-se que derivando duas vezes $f_j(t)$ “perdem-se” os coeficientes a_j e b_j ; no entanto, é directo que $a_j = y_j$, de modo a satisfazer a condição 2 e o coeficiente b_j obtém-se facilmente, se se conhecer a_j , c_j e d_j .

Considere-se, assim, a equação da recta:

$$f''_j(t) = f''(t_j) \frac{t-t_{j+1}}{t_j-t_{j+1}} + f''(t_{j+1}) \frac{t-t_j}{t_{j+1}-t_j}, \quad t_j \leq t \leq t_{j+1}. \quad (4.17)$$

Integrando duas vezes a expressão anterior, tendo em conta que $m_j = f''(t_j)$ e

$h_j = t_{j+1} - t_j$, obtém-se:

$$f_j(t) = \frac{m_j}{6h_j}(t_{j+1} - t)^3 + \frac{m_{j+1}}{6h_j}(t - t_j)^3 + p_j(t_{j+1} - t) + q_j(t - t_j), \quad (4.18)$$

em que p_j e q_j são as constantes desconhecidas de integração, e os seus coeficientes estão definidos de modo a satisfazer as condições de fronteira.

Substituindo x_j em (4.18), obtém-se $p_j = y_j/h_j - m_j \times h_j/6$, tendo em conta que

$f_j(t_j) = y_j$. Do mesmo modo, substituindo t_{j+1} em (4.18), deduz-se que

$q_j = y_{j+1}/h_j - m_{j+1} \times h_j/6$. Substituindo as expressões de p_j e q_j em (4.18), vem

$$f_j(t) = \frac{m_j}{6h_j}(t_{j+1} - t)^3 + \frac{m_{j+1}}{6h_j}(t - t_j)^3 + \left(\frac{y_j}{h_j} - \frac{m_j h_j}{6} \right) (t_{j+1} - t) + \left(\frac{y_{j+1}}{h_j} - \frac{m_{j+1} h_j}{6} \right) (t - t_j). \quad (4.19)$$

De modo a determinar os valores dos $m_j = f''(t_j)$, tem-se pela condição 4 que

$$f'_j(t_j) = f'_{j-1}(t_j) \Leftrightarrow h_{j-1}m_j + g_j m_j + h_j m_{j+1} = u_j, \quad (4.20)$$

em que $j = 1, 2, \dots, n-1$, $u_j = 6 \left(\frac{y_{j+1} - y_j}{h_j} - \frac{y_j - y_{j-1}}{h_{j-1}} \right)$ e $g_j = 2(h_{j-1} + h_j)$.

Quando m_0 e m_K são determinados de forma exógena, o sistema (4.20) pode ser expresso na seguinte forma matricial

$$\begin{pmatrix} g_1 & h_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ h_1 & g_2 & h_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & g_3 & h_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_3 & g_4 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & g_{K-3} & h_{K-3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & h_{K-3} & g_{K-2} & h_{K-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & h_{K-2} & g_{K-1} \end{pmatrix}_{(K-1) \times (K-1)} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \\ \vdots \\ m_{K-3} \\ m_{K-2} \\ m_{K-1} \end{pmatrix}_{(K-1) \times 1} = \begin{pmatrix} u_1 - h_0 m_0 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ \vdots \\ u_{K-3} \\ u_{K-2} \\ u_{K-1} - h_{K-1} m_K \end{pmatrix}_{(K-1) \times 1} \quad (4.21)$$

ou

$$\mathbf{H}\mathbf{m} = \mathbf{v} \Leftrightarrow \mathbf{m} = \mathbf{H}^{-1}\mathbf{v}. \quad (4.22)$$

Uma vez determinados os valores de m_1, m_2, \dots, m_{K-1} é directo que

$$c_j = \frac{m_j}{2}, \quad j = 1, \dots, K-1, \quad (4.23)$$

o que permite escrever

$$d_j = \frac{m_{j+1} - m_j}{6h_j}, \quad j = 0, \dots, K-2. \quad (4.24)$$

Pela condição 2, vem

$$a_j = y_j \quad j = 0, \dots, K-1. \quad (4.25)$$

Tendo determinado a_j, c_j e d_j , facilmente se deduz (tendo em conta a propriedade

$a_j + b_j h_j + c_j h_j^2 + d_j h_j^3 = y_{j+1}$) que

$$b_j = \frac{y_{j+1} - y_j}{h_j} - \frac{h_j(2m_j + m_{j+1})}{6}, \quad j = 0, \dots, K-2. \quad (4.26)$$

Klugman *et. al.* (2004) sugerem as seguintes restrições para m_0 e m_K :

- *Spline* cúbico natural: $m_0 = 0$ e $m_K = 0$. Esta opção minimiza a curvatura do *spline* pois nestes segmentos os polinómios são lineares.
- *Spline* cúbico de curvatura ajustada: fixa-se m_0 e m_K num valor que se considerar mais adequado.
- *Parabolic run out spline*: $m_0 = m_1$ e $m_K = m_{K-1}$. O que implica, tendo em conta (4.24) e as restrições $d_0 = 0$ e $d_K = 0$.
- Condição *not a knot*: $m_0 = m_1 - \frac{h_0(m_2 - m_1)}{h_1}$ e $m_K = m_{K-1} - \frac{h_{K-1}(m_{K-1} - m_{K-2})}{h_{K-2}}$. As

duas restrições obtêm-se impondo a continuidade da terceira derivada em ambas as

extremidades, ou seja: $f_0''(t_1) = f_1''(t_1)$ e $f_{K-2}''(t_{K-1}) = f_{K-1}''(t_{K-1})$. Logo, o polinómio sobre o intervalo $[t_0, t_2]$ é o mesmo, assim como o polinómio sobre $[t_{K-2}, t_K]$.

– *Clamped cubic spline*:

$$m_0 = \frac{3}{h_0} \left(\frac{y_1 - y_0}{h_0} - f_0'(t_0) \right) - \frac{m_1}{2} \text{ e } m_K = \frac{3}{h_{K-1}} \left(f_{K-1}'(t_K) - \frac{y_K - y_{K-1}}{h_{K-1}} \right) - \frac{m_{K-1}}{2}.$$

As restrições obtêm-se fixando a inclinação $f_0'(t_0)$ e $f_{K-1}'(t_K)$ em cada extremidade.

Klugman *et. al.* (2004) mostram que quando os polinómios do *spline* são do terceiro grau, nomeadamente o *spline* cúbico natural ou o *clamped cubic spline*, se obtém a função de oscilação/curvatura mínima que intercepta todos os pontos (*nós*). A “suavidade” é uma propriedade desejável numa função representativa da EPTJ. Uma medida popular do nível de curvatura total de uma função é dada por $\int_{t_0}^{t_K} [f''(t)]^2 dt$, veja-se o Anexo 1.

Apesar do *spline* cúbico apresentar esta característica, na prática, o “ruído” existente no preço das obrigações faz com que a *interpolação* cúbica apresente um excesso de oscilação (*sawtooth pattern*).

4.3.2 Spline de regressão de McCulloch

De modo a minimizar a oscilação do *spline* cúbico, resultante do “ruído” de mercado, McCulloch (1975) propõe que a função de desconto seja estimada por B-*splines* de terceiro grau, isto é (em termos genéricos), por uma função que resulta na combinação linear de *splines* cúbicos (base) compostos por quatro segmentos.

Note-se que normalmente a oscilação do *spline* é uma função crescente do número de pontos de intercepção; portanto, o autor propõe para a função desconto um número de *nós* igual à raiz quadrada do número de obrigações, arredondado ao número inteiro mais próximo.

Considere-se a seguinte relação entre o preço de mercado (por exemplo: o valor médio entre a licitação e oferta) de uma obrigação de maturidade t_m e a função de desconto $d(t)$:

$$P(t_m) = \sum_{j=1}^m CF_{t_j} \times d(t_j) + \varepsilon. \quad (4.27)$$

O objectivo consiste em definir a função *spline* $d(t)$.

Para esse efeito, considere-se um conjunto de K obrigações cujas maturidades são, por ordem crescente, t_1, t_2, \dots, t_K . A série das maturidades pode ser dividida em $s-2$ intervalos, o que resulta em $s-1$ *nós*: T_1, T_2, \dots, T_{s-1} , onde $T_1 = 0$ e $T_{s-1} = t_K$. O B-*spline* cúbico da função de desconto define-se pela seguinte equação:

$$d(t) = 1 + \sum_{i=1}^s \alpha_i g_i(t), \quad (4.28)$$

onde $g_1(t), g_2(t), \dots, g_s(t)$ definem o conjunto (base) de *splines* polinomiais de terceiro grau e $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ são parâmetros (pesos) a estimar.

Note-se que a definição de função de desconto implica por si as seguintes restrições

$$g_i(0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, s \quad (4.29)$$

Por outro lado, as restrições de continuidade da função e das primeiras duas derivadas de $g_i(t)$ nos nós em T_i , sobre os segmentos adjacentes $[T_{i-1}, T_i]$ e $[T_i, T_{i+1}]$, originam as seguintes restrições para as funções base $g_1(t), g_2(t), \dots, g_s(t)$:

Caso 1: $i < s$

$$g_i(t) = \begin{cases} 0 & t < T_{i-1} \\ \frac{(t - T_{i-1})^3}{6(T_i - T_{i-1})}, & T_{i-1} \leq t < T_i \\ \frac{(T_i - T_{i-1})^2}{6} + \frac{(T_i - T_{i-1})(t - T_i) + (t - T_i)^2}{2} - \frac{(t - T_i)^3}{6(T_{i+1} - T_i)} & T_i \leq t < T_{i+1} \\ (T_{i+1} - T_{i-1}) \left(\frac{2T_{i+1} - T_i - T_{i-1}}{6} + \frac{t - T_{i+1}}{2} \right) & t \geq T_{i+1} \end{cases} \quad (4.30)$$

Caso 2: $i = s$

$$g_i(t) = t \quad (4.31)$$

Substituindo (4.28) em (4.27), obtém-se que

$$P(t_m) - \sum_{j=1}^m CF_{t_j} = \sum_{i=1}^s \alpha_i \sum_{j=1}^m CF_{t_j} g_i(t_j) + \varepsilon \quad (4.32)$$

Dado que a função (4.32) é linear em relação a $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$, o autor propõe que estes sejam estimados através do método dos mínimos quadrados ordinários, ou seja,

$$\mathbf{a} = [\mathbf{X}^T \mathbf{X}]^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y}, \quad (4.33)$$

em que

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_s \end{bmatrix}_{(s \times 1)}, \mathbf{y} = \begin{bmatrix} P(t_1) - CF_{t_1} \\ P(t_2) - \sum_{j=1}^{t_2} CF_{t_j} \\ \vdots \\ P(t_K) - \sum_{j=1}^{t_K} CF_{t_j} \end{bmatrix}_{(K \times 1)} \text{ e } \mathbf{X} = \begin{pmatrix} CF_{t_1} \times g_1(t_1) & CF_{t_1} \times g_2(t_1) & \dots & CF_{t_1} \times g_s(t_1) \\ \sum_{j=1}^{t_2} CF_{t_j} \times g_1(t_j) & \sum_{j=1}^{t_2} CF_{t_j} \times g_2(t_j) & \dots & \sum_{j=1}^{t_2} CF_{t_j} \times g_s(t_j) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{j=1}^{t_K} CF_{t_j} \times g_1(t_j) & \sum_{j=1}^{t_K} CF_{t_j} \times g_2(t_j) & \dots & \sum_{j=1}^{t_K} CF_{t_j} \times g_s(t_j) \end{pmatrix}_{(K \times s)}$$

partindo do pressuposto que a obrigação de maturidade t_1 apenas liberta cash flows (cupão + principal) na data t_1 .

McCulloch recomenda que os *nós* sejam escolhidos de modo a haver aproximadamente o mesmo número de obrigações em cada segmento de maturidade. Define-se, então:

$$T_i = \begin{cases} 0 & i = 1 \\ t_h + \theta(t_{h+1} - t_h) & 2 \leq i \leq s-2, \\ t_k & i = s-1 \end{cases} \quad (4.34)$$

onde h é um número inteiro definido por

$$h = INT \left[\frac{(i-1)K}{s-2} \right], \quad (4.35)$$

o parâmetro θ é dado pela seguinte expressão

$$\theta = \frac{(i-1)K}{s-2} - h. \quad (4.36)$$

e
$$s = Round \left[\sqrt{K} \right]. \quad (4.37)$$

McCulloch reconhece (devido à existência de heteroscedasticidade) que os erros da regressão poderão ser crescentes com a maturidade das obrigações, devido, por exemplo, ao facto de quanto maior é a maturidade, maior será o *spread* licitação-oferta, o nível de ilíquidez do título, etc.

Fisher, Nychka e Zervo (1995) argumentam que os *splines* de regressão produzem ainda uma curva de taxas futuras com excessiva oscilação, principalmente para as maturidades

mais longas, e que a escolha dos *nós* influencia directamente os parâmetros do *spline*, o que é não é desejável uma vez que estes são definidos exógenamente.

4.3.3 Modelo de Fisher-Nychka-Zervos (*smoothing spline*)

Fisher, Nychka e Zervos (1995) apresentam um modelo *smoothing spline* para a estimação da EPTJ. A vantagem do modelo em relação ao anterior é a introdução de um parâmetro que penaliza a oscilação do *spline*. Quanto maior for essa penalização, menor será o número de parâmetros daquele. Por conseguinte, apenas um valor controla toda a parametrização do modelo, que funciona como um *trade-off* entre ajustamento e “suavidade”.

Outro aspecto a ter em conta é que a modelização das taxas de desconto é obtida directamente pela curva das taxas futuras, pois

$$P(t_m) = \sum_{j=1}^m CF_{t_j} \times d(t_j) = \sum_{j=1}^m CF_{t_j} \times e^{-t_j y(t_j)} = \sum_{j=1}^m CF_{t_j} \times e^{-\int_0^{t_j} f(t) dt}, \quad (4.38)$$

mantendo as variáveis os significados anteriores.

Se se representar o parâmetro de penalização por λ , o modelo é definido pela seguinte expressão

$$\underset{f(t)}{\text{Min}} \left[\sum_{i=1}^K \{P_i - \hat{P}_i(f(t))\}^2 + \lambda \int_0^{t_K} [f''(t)]^2 dt \right], \quad (4.39)$$

onde P_i é o valor de mercado da obrigação i , $f(t)$ é a função *basis spline* das taxas futuras e $\hat{P}_i(f(t))$ é o valor teórico da obrigação i .

Se o número de *nós* for igual ao número de observações (obrigações), então está-se perante um ajustamento total dos dados (*spline de interpolação cúbica*); e, por conseguinte, o erro quadrático (primeiro termo de (4.39)) será zero, mas em

contrapartida o segundo termo da mesma expressão poderá apresentar um nível de curvatura total bastante elevado.

Se a função $f(t)$ for uma recta, então o valor da curvatura total será zero, mas o erro quadrático será certamente elevado.

Por outro lado, quanto menor (maior) o valor de λ , maior o peso atribuído ao ajustamento (à oscilação).

4.3.4 Modelo de Waggoner

Waggoner (1997) estende o modelo de Fisher, Nychka e Zervos, de modo que a penalização da oscilação seja superior para maturidades mais longas, pois nesses segmentos a EPTJ é praticamente horizontal. Argumenta também que se λ for uma função crescente do tempo, então o modelo também se torna mais adequado para apreçar obrigações de curto prazo.

Waggoner (1997) p. 10 *“By moving to a variable roughness penalty, we retain flexibility on the short end, while damping oscillations on the long end, and thus are better able to price short term securities”.*

Considere-se então

$$\text{Min}_{f(t)} \left[\sum_{i=1}^K \left\{ P_i - \hat{P}_i(f(t)) \right\}^2 + \int_0^{t_K} \lambda(t) [f''(t)]^2 dt \right], \quad (4.40)$$

$$\text{onde} \quad \lambda(t) = \begin{cases} 0,1 & 0 \leq t \leq 1 \\ 100 & 1 \leq t \leq 10, \\ 100.000 & t \geq 10 \end{cases} \quad (4.41)$$

e as restantes variáveis mantêm o seu significado anterior.

Uma vantagem dos métodos *spline*, em relação aos modelos paramétricos, resulta de serem construídos por segmentos que se movimentam independentemente uns dos

outros; a principal desvantagem advém do facto de ser necessária uma gestão entre a oscilação da função *spline* e o ajustamento aos dados.

4.4 Evolução dinâmica das taxas de juro (Modelos Vasicek e CIR)

Os modelos anteriores são aplicados quando se pretende estimar a EPTJ actual, no entanto, não modelizam a sua evolução futura, para o que é necessária uma abordagem que tenha em conta a natureza estocástica das taxas de juro.

Os modelos Vasicek e CIR são modelos de equilíbrio, pois baseiam-se em argumentos de ausência de arbitragem, onde a modelização da taxa instantânea inclui uma componente determinística com reversão, isto é, uma componente que “força” a convergência da taxa instantânea para o seu valor de equilíbrio, e uma componente de difusão (processo de *Wiener*) associada a um parâmetro de volatilidade, atribuindo-lhe assim a natureza estocástica.

Uma vez definido o processo estocástico da taxa instantânea é possível definir-se o processo estocástico do valor futuro de uma obrigação, pois esta resulta de uma transformação da primeira.

Note-se ainda que no modelo Vasicek e no modelo CIR a EPTJ actual é um *output*, que apesar de ser suficientemente flexível para assumir diversas configurações, não tem a flexibilidade de se ajustar perfeitamente a uma dada estrutura. Assim, estes modelos não conseguem ajustar, por exemplo, o preço de uma obrigação de cupão ao seu valor presente.

4.4.1 Abordagem geral de Vasicek

Vasicek (1977) apresenta uma abordagem geral de equilíbrio de factor único para a taxa instantânea $r(t)$ da EPTJ, em que esta segue um processo de Itô.

A classificação de factor único advém do facto de a EPTJ do modelo apresentado depender apenas de uma variável de estado ($r(t)$), e por conseguinte de um único processo de difusão (Wiener).

Define-se assim:

$$dr(t) = \mu_r(r, t)dt + \sigma_r(r, t)dZ(t), \quad (4.42)$$

onde $\mu_r(r, t)$ e $\sigma_r(r, t)$ são funções de da taxa instantânea $r(t)$ e do tempo t e $dZ(t)$ é um processo de Wiener.

Vasicek assume que o preço de todas as obrigações de cupão zero sem risco de crédito e livres de opções é função de $r(t)$, do tempo corrente t e da sua maturidade T , onde o tempo até à maturidade é dado por $T - t$. Logo, tem-se que

$$P(t, T) = P(r(t), t, T). \quad (4.43)$$

Dada a hipótese, toda a EPTJ das rendibilidades das obrigações de cupão zero, $y(t, T)$, pode ser determinada da seguinte forma

$$y(t, T) = -\frac{\ln P(r(t), t, T)}{T - t}. \quad (4.44)$$

Aplicando o lema de Itô em (4.43), tem-se

$$dP(r(t), t, T) = \left(\frac{\partial P}{\partial t} + \mu_r(r, t) \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{2} \sigma_r^2(r, t) \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} \right) dt + \frac{\partial P}{\partial r} \sigma_r(r, t) dZ(t). \quad (4.45)$$

Nawalkha (2007) mostra que, na ausência de arbitragem e de custos de transação, é possível constituir uma carteira com duas obrigações, tomando uma posição longa numa e uma posição curta noutra, o que elimina o termo de difusão do processo e torna a

rendibilidade da carteira igual à taxa de juro sem risco. Através desta carteira obtém-se a equação diferencial parcial fundamental (EDP) de equilíbrio:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + [\mu_r(r, t) - \sigma_r(r, t)\gamma(r, t)] \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{2} \sigma_r(r, t) \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} - r(t)P(r, T) = 0. \quad (4.46)$$

A EDP permite que se obtenha uma solução fechada para o preço de uma obrigação de cupão zero, sob a condição de fronteira $P(T, T) = 1$. De um modo geral, permite obter o valor de qualquer activo que seja apenas função de $r(t)$ e t .

4.4.2 Modelo fundamental de Vasicek

O modelo fundamental consiste no seguinte processo de difusão (sob a medida de probabilidade de risco-neutro):

$$dr(t) = \alpha(m - r(t))dt + \sigma dZ(t), \quad (4.47)$$

onde α , m e σ são constantes positivas.

A componente determinística do modelo segue um processo de reversão, em que m é a taxa de equilíbrio de longo prazo e α a velocidade de convergência. Se $r(t) > m$, a taxa instantânea encontra-se acima do seu valor de equilíbrio e, consequentemente, a componente determinística “puxa” a taxa instantânea para baixo. Se $r(t) < m$, então a componente determinística “puxa” $dr(t)$ para cima. Dado que se trata de um modelo de factor único, todas as taxas, para os diversos horizontes, estão perfeitamente correlacionadas.

Brigo e Mercurio (2007) apresentam a solução para o preço de uma obrigação de cupão zero para o processo (4.47), tendo em conta a seguinte forma funcional:

$$P(t, T) = A(t, T)e^{-B(t, T)r(t)}, \quad (4.48)$$

em que

$$A(t, T) = \exp \left\{ \left(m - \frac{\sigma^2}{2\alpha^2} \right) [B(t, T) - T + t] - \frac{\sigma^2}{4\alpha} B(t, T) \right\} \quad (4.49)$$

$$e \quad B(t, T) = \frac{1}{\alpha} \left[1 - e^{-\alpha(T-t)} \right]. \quad (4.50)$$

Note-se que no modelo de Vasicek a probabilidade de se obter taxas negativas é não nula. Esta probabilidade aumenta com o horizonte temporal t e com a volatilidade σ , e diminui com o nível actual da taxa instantânea $r(s)$ e com a velocidade de convergência m . Nawalkha afirma que (para parâmetros razoáveis) a probabilidade de se verificar taxas negativas futuras é bastante pequena.

4.4.3 Modelo CIR

Cox, Ingersol e Ross (1985) apresentam um modelo de equilíbrio onde a taxa instantânea é sempre positiva. A formulação do modelo sob a medida de risco neutro (situação de equilíbrio) é

$$dr(t) = \alpha(m - r(t))dt + \sigma\sqrt{r(t)}dZ(t), \quad (4.51)$$

onde α , m e σ são constantes positivas. Note-se que $2m\alpha > \sigma^2$, de modo a garantir que as taxas futuras se mantêm sempre positivas. O modelo só difere do modelo de Vasicek pela introdução de $\sqrt{r(t)}$ no termo de difusão. Assim, o processo terá uma volatilidade elevada (baixa), se a taxa instantânea for elevada (baixa).

A função-preço mantém a forma funcional do modelo Vasicek; no entanto, os valores de $A(t, T)$ e $B(t, T)$ são respectivamente

$$A(t, T) = \left[\frac{2h \exp\{(\alpha + h)(T - t)/2\}}{2h + (\alpha + h)(\exp\{(T - t)h\} - 1)} \right]^{2\alpha m / \sigma^2} \quad (4.52)$$

e

$$B(t, T) = \frac{2(\exp\{(T - t)h\} - 1)}{2h + (\alpha + h)(\exp\{(T - t)h\} - 1)}, \quad (4.53)$$

onde $h = \sqrt{\alpha^2 + 2\sigma^2}$.

As taxas de juro à vista obtêm-se também a partir da relação (4.44).

Embora o modelo CIR não admita taxas negativas, sendo portanto uma evolução em relação ao modelo anterior, continua a não ter a flexibilidade de se ajustar a uma dada EPTJ actual. Para esse efeito, seria necessário que também a componente determinística fosse função explícita de t .

Outra questão a ter em conta é que os modelos Vasicek e CIR são modelos Gaussianos; no entanto, por vezes, observam-se oscilações abruptas na EPTJ, cuja frequência não é devidamente captada pela distribuição normal. Este facto justifica a existência de processos denominados *short rate mixed jump-diffusion processes*, que se definem, em termos gerais, do seguinte modo

$$dr(t) = \alpha(r, t)dt + \sigma(r, t)Z(t) + h(J, r, t)dN(\lambda). \quad (4.54)$$

O processo é idêntico ao processo de Itô excepto pelo último termo, que tem duas componentes.

A componente $dN(\lambda)$ representa um processo de Poisson de intensidade λ independente de $dZ(t)$; logo,

$$dN(\lambda) = \begin{cases} 0, & \text{com probabilidade } 1 - \lambda dt, \text{ e} \\ 1, & \text{com probabilidade } \lambda dt \end{cases} \quad (4.55)$$

Quando $dN(\lambda)=1$, então a magnitude do salto é igual a $h(J,r,t)$, onde J é uma variável aleatória, independente de $dZ(t)$ e $dN(\lambda)$. A variável J poderá, por exemplo, seguir uma distribuição binomial, normal, etc.

O processo (4.54) é ainda extensível de modo a incluir n -processos de Wiener, eliminando, assim, a correlação perfeita entre as taxas instantâneas para os diversos prazos.

Brigo e Mercurio (2007) destacam, no entanto, algumas vantagens importantes dos modelos Vasicek e CIR, nomeadamente:

- O processo de reversão, que em termos económicos é bastante apelativo.
- A existência de soluções explícitas para as equações (4.47) e (4.51).
- São adequados para simulações de Monte Carlo.
- Os parâmetros dos modelos estão directamente relacionados com quantidades facilmente observáveis.

Capítulo 5 - Risco de taxa de juro, Duração e Convexidade

Ilustração num contexto do QIS4

Neste capítulo, analisaremos o exercício proposto pelo QIS4 relativamente ao sub-módulo do risco de taxa de juro (módulo risco de mercado), numa carteira de acidentes de trabalho (AT). Incluem-se todos os activos e passivos sensíveis a deslocações da EPTJ, em 31-12-2007.

O objectivo essencial consiste em ilustrar a aplicação de alguns dos elementos apresentados nos capítulos precedentes.

5.1 Descrição do exercício do QIS4 para o risco de taxa de juro

Nas especificações técnicas (TS) do QIS4, no ponto TS.IX.B.1, vem

“Assets sensitive to interest rate movements will include fixed-income investments, insurance liabilities, and financing instruments (loan capital) and interest-rate derivatives. Liability cash flows received in the future will be sensitive to a change in the rate at which those cash flows are discounted”.

Os valores presentes dos cash flows, relativamente ao activo e ao passivo, sensíveis a variações das taxas de juro (de capitalização discreta) poderão ser determinados pela EPTJ fornecida no *site* da CEIOPS, cujas taxas para a zona EURO são dadas pela Tabela 5.1.

Maturidade (anos)	taxas	Maturidade (anos)	taxas	Maturidade (anos)	taxas	Maturidade (anos)	taxas
0	3,9160%	18	4,9514%	38	4,7973%	58	4,5543%
0,25	4,6840%	19	4,9648%	39	4,7864%	59	4,5459%
0,5	4,7071%	20	4,9769%	40	4,7760%	60	4,5379%
1	4,6960%	21	4,9734%	41	4,7586%	61	4,5301%
2	4,5262%	22	4,9702%	42	4,7420%	62	4,5225%
3	4,5097%	23	4,9674%	43	4,7261%	63	4,5152%
4	4,5330%	24	4,9647%	44	4,7110%	64	4,5081%
5	4,5529%	25	4,9623%	45	4,6966%	65	4,5013%
6	4,5797%	26	4,9503%	46	4,6828%	66	4,4946%
7	4,6137%	27	4,9393%	47	4,6695%	67	4,4882%
8	4,6529%	28	4,9290%	48	4,6569%	68	4,4819%
9	4,6975%	29	4,9195%	49	4,6447%	69	4,4758%
10	4,7417%	30	4,9105%	50	4,6331%	70	4,4699%
11	4,7843%	31	4,8932%	51	4,6219%	71	4,4642%
12	4,8197%	32	4,8769%	52	4,6111%	72	4,4586%
13	4,8508%	33	4,8616%	53	4,6007%	73	4,4532%
14	4,8775%	34	4,8472%	54	4,5907%	74	4,4479%
15	4,9006%	35	4,8337%	55	4,5811%	75	4,4428%
16	4,9197%	36	4,8208%	56	4,5719%		
17	4,9365%	37	4,8087%	57	4,5629%		

Tabela 5.1 - Taxas de juro à vista do cenário inicial

O exercício propõe que se analise o impacto de dois cenários predefinidos: no primeiro, a EPTJ da Tabela 5.1 sofre um choque instantâneo no sentido ascendente; no segundo, as mesmas taxas sofrem um choque instantâneo no sentido descendente.

A calibração dos choques tem como objectivo reflectir um VaR a 99,5% com um horizonte temporal de um ano.

A nova estrutura nos cenários ascendente e descendente deriva da multiplicação da EPTJ inicial por $(1+s^{asc.})$ e por $(1+s^{desc.})$, respectivamente, em que $s^{asc.}$ e $s^{desc.}$ para a zona Euro são dados pela Tabela 5.2 (veja-se TS.IX.B.5):

Maturidade t (anos)	1	2	3	4	5	6	7
variação relativa $s^{asc.}(t)$	0,94	0,77	0,69	0,62	0,56	0,52	0,49
variação relativa $s^{desc.}(t)$	-0,51	-0,47	-0,44	-0,42	-0,4	-0,38	-0,37
Maturidade t (anos)	8	9	10	11	12	13	14
variação relativa $s^{asc.}(t)$	0,46	0,44	0,42	0,42	0,42	0,42	0,42
variação relativa $s^{desc.}(t)$	-0,35	-0,34	-0,34	-0,34	-0,34	-0,34	-0,34
Maturidade t (anos)	15	16	17	18	19	20+	
variação relativa $s^{asc.}(t)$	0,42	0,41	0,4	0,39	0,38	0,37	
variação relativa $s^{desc.}(t)$	-0,34	-0,33	-0,33	-0,32	-0,31	-0,31	

Tabela 5.2 - Choques à EPTJ propostos no QIS4

Assim, a nova taxa de juro a um ano no cenário ascendente é

$$(1+0,046960) \times (1+0,94) = 0,091102.$$

Para o cálculo da carga de capital para o risco de taxa de juro definem-se as seguintes variáveis:

A_0 = valor presente do activo a 31-12-2007 obtido pela EPTJ inicial.

L_0 = valor presente do passivo a 31-12-2007 obtido pela EPTJ inicial.

$A_{asc.}$ = valor presente do activo a 31-12-2007 no cenário ascendente.

$L_{asc.}$ = valor presente do passivo a 31-12-2007 no cenário ascendente.

$A_{desc.}$ = valor presente do activo a 31-12-2007 no cenário descendente.

$L_{desc.}$ = valor presente do passivo a 31-12-2007 no cenário descendente.

Define-se ainda:

$V_0 = A_0 - L_0$, isto é, a situação líquida inicial.

$V_{asc.} = A_{asc.} - L_{asc.}$, isto é, a situação líquida após o choque ascendente.

$V_{desc.} = A_{desc.} - L_{desc.}$, isto é, a situação líquida após o choque descendente.

A carga de capital para o risco de taxa de juro é dado pelo módulo do cenário mais gravoso isto é, $\left| \min[V_{asc.}, V_{desc.}, 0] \right|$.

5.2 Passivo da carteira de AT

Os cash flows da Tabela 5.3 representam as responsabilidades de uma carteira hipotética de acidentes de trabalho.

Note-se que os cash flows do passivo estão anualizados e pressupõe-se que os pagamentos são efectuados a meio do ano.

Data	CF estimado	Data	CF estimado	Data	CF estimado
30-06-2008	521.418,99 €	30-06-2025	239.136,75 €	30-06-2042	48.449,84 €
30-06-2009	506.010,94 €	30-06-2026	228.031,21 €	30-06-2043	41.682,53 €
30-06-2010	488.867,95 €	30-06-2027	215.130,68 €	30-06-2044	35.553,22 €
30-06-2011	475.644,02 €	30-06-2028	201.768,40 €	30-06-2045	30.047,18 €
30-06-2012	456.045,46 €	30-06-2029	188.996,00 €	30-06-2046	25.159,33 €
30-06-2013	439.630,77 €	30-06-2030	175.248,24 €	30-06-2047	20.850,65 €
30-06-2014	421.324,42 €	30-06-2031	161.623,10 €	30-06-2048	17.086,95 €
30-06-2015	405.848,86 €	30-06-2032	148.753,80 €	30-06-2049	13.814,15 €
30-06-2016	384.712,23 €	30-06-2033	136.374,03 €	30-06-2050	10.998,19 €
30-06-2017	367.039,94 €	30-06-2034	124.400,78 €	30-06-2051	8.591,03 €
30-06-2018	345.560,76 €	30-06-2035	113.484,12 €	30-06-2052	6.559,58 €
30-06-2019	329.187,15 €	30-06-2036	102.433,22 €	30-06-2053	4.859,99 €
30-06-2020	313.252,79 €	30-06-2037	91.900,32 €	30-06-2054	3.446,62 €
30-06-2021	297.713,21 €	30-06-2038	81.953,26 €	30-06-2055	2.289,15 €
30-06-2022	281.446,01 €	30-06-2039	72.623,79 €	30-06-2056	1.351,10 €
30-06-2023	267.438,58 €	30-06-2040	63.925,64 €	30-06-2057	597,27 €
30-06-2024	252.255,44 €	30-06-2041	55.863,37 €		

Tabela 5.3 - Cash flows das responsabilidades

Acrescenta-se ainda que, tendo por base a metodologia basilar do novo regime de Solvência, as provisões técnicas (sob análise do pilar I), dada a inexistência de um mercado de transacção de responsabilidades, serão estabelecidas por via de um método de cálculo reconhecido que salvaguarde os direitos dos segurados e seja harmonizável a nível Europeu. Deste modo, assistir-se-á a uma mudança considerável das regras e pressupostos actualmente utilizados no cálculo das responsabilidades, passando-se de uma abordagem prudencial, baseada em regras, para uma abordagem baseada nos princípios do mercado.

5.3 Activos da carteira AT

Para os activos, será considerada uma carteira de Obrigações do Tesouro nacionais, cujas características estão descritas no quadro 5.4, de acordo com o Instituto de Gestão da Tesouraria e do Crédito Público, I.P.

Título	Código ISIN	Coupon	Coupon Rate	1st Sett Date	Int Accrual Date	Maturity Date	1 st Coupon Date	Business Day Convention	Accrual Day Count Basis
OT 5,375% Jun 2008	PTOTEB0E0012	Anual	5,375%	10-02-1998	23-06-1998	23-06-2008	23-06-2008	Preceding	Act/Act
OT 3,95% Jul 2009	PTOTEC0E0011	Anual	3,950%	22-01-1999	22-01-1999	15-07-2009	15-07-1999	Following	Act/Act
OT 5,85% Mai 2010	PTOTEH0E0008	Anual	5,850%	20-01-2000	20-01-2000	20-05-2010	20-05-2000	Following	Act/Act
OT 5,15% Jun 2011	PTOTEJ0E0006	Anual	5,150%	13-03-2001	13-03-2001	15-06-2011	15-06-2002	Following	Act/Act
OT 5% Jun 2012	PTOTEK0E0003	Anual	5,000%	13-02-2002	13-02-2002	15-06-2012	15-06-2003	Following	Act/Act
OT 5,45% Set 2013	PTOTEG0E0009	Anual	5,450%	26-05-1998	26-05-1998	23-09-2013	23-09-1999	Preceding	Act/Act
OT 3,35% Out 2015	PTOTE30E0017	Anual	3,350%	13-07-2005	13-07-2005	15-10-2015	15-10-2006	Following	Act/Act
OT 4,35% Out 2017	PTOTELOE0010	Anual	4,350%	03-05-2007	03-05-2007	16-10-2017	16-10-2007	Following	Act/Act
OT 3,85% Abr 2021	PTOTEY0E0007	Anual	3,850%	23-02-2005	23-02-2005	15-04-2021	15-04-2006	Following	Act/Act
OT 4,10% Abr 2037	PTOTE50E0007	Anual	4,100%	22-03-2006	22-03-2006	15-04-2037	15-04-2007	Following	Act/Act

Tabela 5.4 - Obrigações do Tesouro Nacionais

Independentemente de se considerar obrigações de cupão fixo governamentais ou obrigações de cupão fixo *corporate*, a EPTJ utilizada para se obter o valor teórico de cada título será a mesma (EPTJ sem risco), pois o risco de crédito é determinado num sub-módulo à parte. Para efeitos de ilustração, considera-se que os títulos são perfeitamente divisíveis.

5.4 Efeitos dos choques propostos pelo QIS4 na carteira AT

Dado que dificilmente os cash flows da carteira serão coincidentes com os prazos da Tabela 5.1, torna-se necessário definir um método de interpolação da EPTJ. De modo a obter uma EPTJ contínua e diferenciável, capaz de interceptar todas as taxas das estruturas propostas pelo QIS4, propõe-se o método de interpolação cúbica. O seguinte gráfico ilustra o *natural cubic spline* da Tabela 5.1.

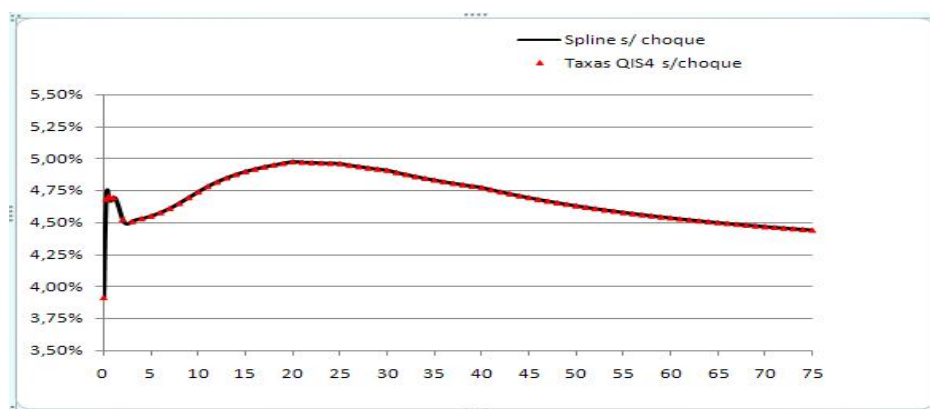


Figura 5.1 - *Natural cubic spline* do cenário inicial

Como se pode observar, existe um “salto” (não desejável) no início da curva. De modo a eliminar/minimizar o “salto”, optou-se por se utilizar um *clamped cubic spline* (descrito no Capítulo 4 no ponto 4.3.1) com $f'_0(t_0)=0,086$ e para o último nó não foi necessário qualquer tipo de ajustamento; logo, $f'_{74}(t_{75})=0$. Note-se ainda que as taxas propostas pelo QIS4 não foram alvo de qualquer processo de suavização (veja-se TS.XVII.A - *Annex* TP1); portanto, é natural que a EPTJ interpolada por este método não apresente um aspecto “suave”.

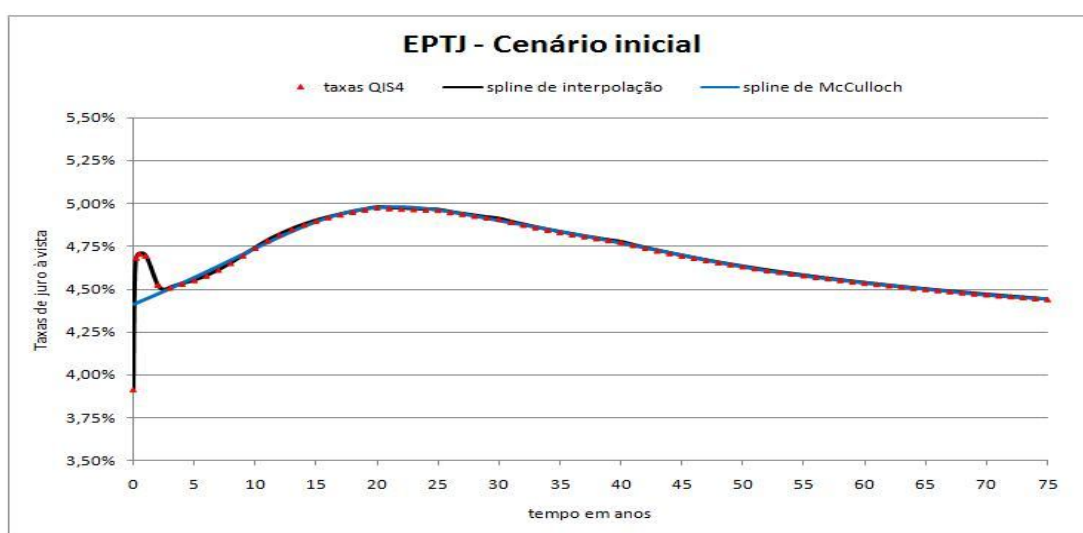


Figura 5.2 - *Clamped cubic spline* e *spline* de McCulloch no cenário inicial

Para a EPTJ do cenário ascendente optou-se novamente pelo *clamped cubic spline* com $f'_0(t_0)=0,16$ e $f'_{74}(t_{75})=0$, e para a EPTJ do cenário descendente a interpolação foi obtida através do *natural cubic spline*.

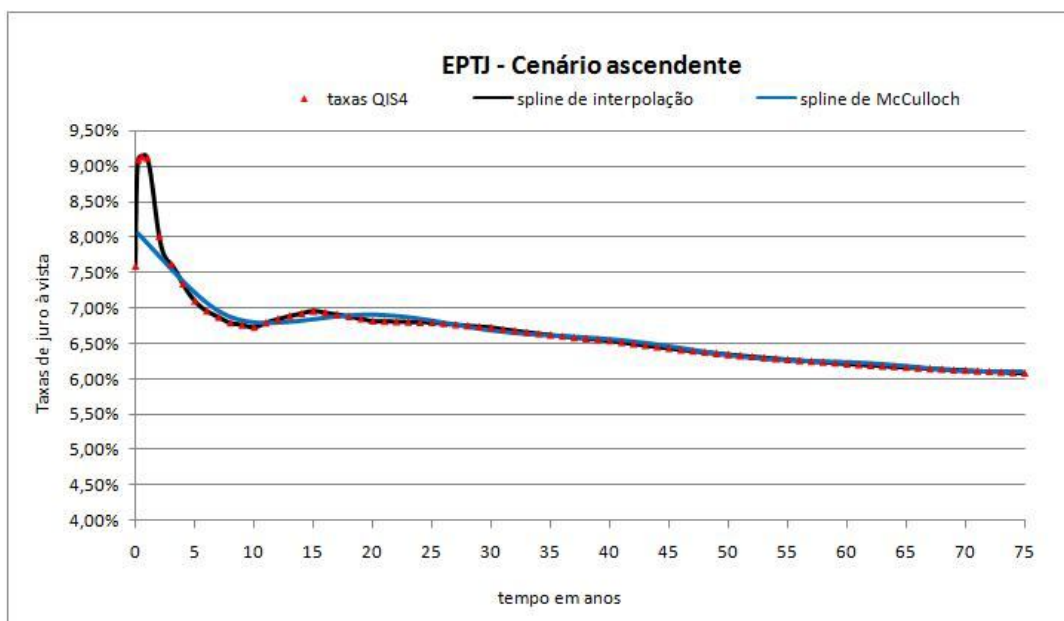


Figura 5.3 - *Clamped cubic spline* e *spline* de McCulloch no cenário ascendente

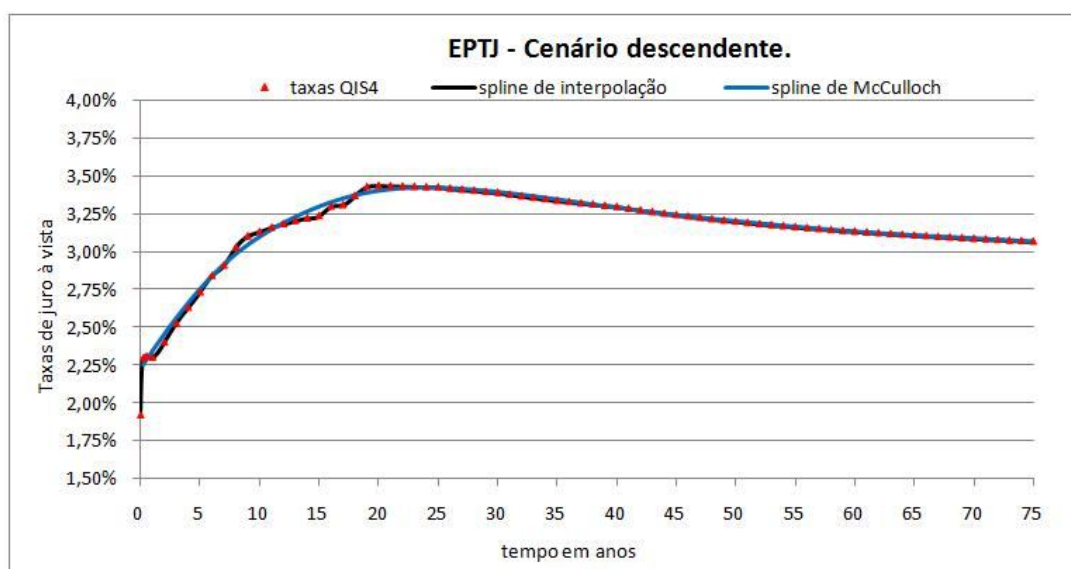


Figura 5.4 - *Natural cubic spline* e *spline* de McCulloch no cenário descendente

Os parâmetros das interpolações encontram-se no Anexo 2.

A inclusão do *spline* de regressão de McCulloch permite observar que este é mais “suave” do que o *spline* de interpolação; no entanto, as diferenças entre uma estrutura e outra não são muito significativas para efeitos de actualização dos cash flows.

5.4.1 Efeitos sobre o passivo

Para o passivo obtiveram-se os seguintes resultados:

						choque asc.	choque desc.
						variação rel.	variação abs.
						-15,65%	15,89%
						-875.993,63 €	889.543,08 €
						5.597.607,69 €	4.721.614,05 €
							6.487.150,77 €
		D_{FW}		Convexidade			
		8,51		134,15			
Data	CF	t	EPTJ inicial	EPTJ asc.	EPTJ desc.	VP inicial	VP asc.
30-06-2008	521.418,99 €	0,50	4,7071%	9,1318%	2,3065%	509.596,16 €	499.186,92 €
30-06-2009	506.010,94 €	1,50	4,6150%	8,6270%	2,3359%	472.928,64 €	446.994,84 €
30-06-2010	488.867,95 €	2,50	4,4986%	7,7204%	2,4644%	437.967,20 €	405.966,81 €
30-06-2011	475.644,02 €	3,50	4,5229%	7,4964%	2,5793%	407.444,54 €	369.357,33 €
30-06-2012	456.045,46 €	4,50	4,5425%	7,2092%	2,6786%	373.390,44 €	333.367,59 €
30-06-2013	439.630,77 €	5,50	4,5653%	7,0210%	2,7899%	343.897,83 €	302.668,43 €
30-06-2014	421.324,42 €	6,50	4,5960%	6,9158%	2,8718%	314.587,69 €	272.775,72 €
30-06-2015	405.848,86 €	7,50	4,6326%	6,8292%	2,9631%	288.958,49 €	247.257,99 €
30-06-2016	384.712,23 €	8,50	4,6751%	6,7767%	3,0710%	260.847,79 €	220.277,30 €
30-06-2017	367.039,94 €	9,50	4,7199%	6,7426%	3,1175%	236.783,68 €	197.419,31 €
30-06-2018	345.560,76 €	10,50	4,7638%	6,7568%	3,1434%	211.945,99 €	173.881,24 €
30-06-2019	329.187,15 €	11,50	4,8029%	6,8221%	3,1702%	191.895,63 €	154.070,79 €
:	:	:	:	:	:	:	:
:	:	:	:	:	:	:	:

Tabela 5.5 - Cash flows actualizados do passivo, duração e convexidade

Assim, o valor presente, a duração de Fisher e Weil (F&W) e a convexidade do passivo são respectivamente:

$$L_0 = 5.597.607,69 \quad (5.1)$$

$$D_{FW} = 8,51 \quad (5.2)$$

$$C = 134,15 \quad (5.3)$$

Os valores de (5.1), (5.2) e (5.3) foram obtidos aplicando directamente as fórmulas (1.60) e (1.61), considerando $\alpha = 0,0001$.

5.4.2 Efeitos sobre o activo

No que diz respeito ao activo, é necessário definir uma estratégia de investimentos, tendo em conta as diversas possibilidades analisemos alguns exemplos.

Exemplo 1 : Diversificação do investimento

Considerando que o valor presente das obrigações a 31-12-2007 é igual ao valor presente do passivo e tendo como objectivo a máxima dispersão do investimento em cada OT, define-se o seguinte problema de minimização, onde p_i é a proporção investida em cada OT:

$$\text{Min} \sum_{i=1}^{10} p_i^2 \quad (5.4)$$

$$s.a: \quad A_0 = L_0; \quad \sum_{i=1}^{10} p_i = 1; \quad p_i \geq 0$$

Através da ferramenta *Solver* do Excel, obtém-se a seguinte solução:

		soma quadrado	var. rel	choque asc.	choque desc.		
		0,100000	var. absl.	-11,42%	10,43%		
				-639.286,68 €	583.860,34 €		
Obrigações		100,00%	5.597.607,69 €	4.958.321,01 €	6.181.468,02 €	5,51	67,56
Descrição	Quantidade	Peso	VP inicial	VP asc.	VP desc.	D _{FW}	Convex.
OT 5,375% Jun 2008	543.330	10,00%	559.924,80 €	548.952,65 €	566.166,40 €	0,46	0,64
OT 3,95% Jul 2009	555.304	10,00%	559.903,00 €	529.437,11 €	578.645,77 €	1,44	3,47
OT 5,85% Mai 2010	525.794	10,01%	560.081,73 €	522.681,13 €	585.518,20 €	2,13	6,80
OT 5,15% Jun 2011	534.657	10,00%	559.927,70 €	511.467,40 €	594.695,21 €	3,04	12,68
OT 5% Jun 2012	535.892	10,00%	559.927,83 €	504.979,89 €	602.403,72 €	3,84	19,46
OT 5,45% Set 2013	529.368	10,00%	559.925,43 €	497.470,90 €	610.685,82 €	4,81	29,68
OT 3,35% Out 2015	605.250	9,99%	559.410,13 €	484.066,74 €	625.273,20 €	6,59	53,20
OT 4,35% Out 2017	570.729	10,00%	559.833,00 €	477.499,49 €	636.523,64 €	7,72	74,50
OT 3,85% Abr 2021	599.472	10,00%	559.513,83 €	458.535,85 €	660.099,15 €	9,71	121,42
OT 4,10% Abr 2037	616.518	9,99%	559.160,23 €	423.229,84 €	721.456,90 €	15,38	354,19

Tabela 5.6 - Estratégia de diversificação do investimento

Note que o *Solver* tende a devolver mínimos locais que dependem dos valores de partida. Se for permitida a venda a descoberto, facilmente se encontra o mínimo global para o problema através dos multiplicadores de Lagrange.

Por exemplo, os resultados para a OT 5,45% Set 2013 são:

Quantidade	529.368					variação rel.	-11,15%	9,07%
Maturidade	23-09-2013		D_{FW}	Convexidade		variação abs.	-62.454,53 €	50.760,39 €
PTOTEGOE0009	OT 5.45% Set 2013		4,81	29,68		559.925,43 €	497.470,90 €	610.685,82 €
Data	CF	t	EPTJ inicial	EPTJ asc.	EPTJ desc.	VP inicial	VP asc.	VP desc.
23-09-2008	28.771,70 €	0,73	4,7093%	9,1500%	2,3015%	27.819,30 €	26.986,77 €	28.296,77 €
23-09-2009	28.850,53 €	1,73	4,5692%	8,3209%	2,3634%	26.702,76 €	25.121,72 €	27.706,89 €
23-09-2010	28.850,53 €	2,73	4,5016%	7,6671%	2,4936%	25.581,08 €	23.578,67 €	26.973,41 €
23-09-2011	28.850,53 €	3,73	4,5278%	7,4254%	2,6027%	24.456,26 €	22.084,01 €	26.212,84 €
24-09-2012	28.929,57 €	4,74	4,5472%	7,1555%	2,7030%	23.434,65 €	20.852,81 €	25.496,05 €
23-09-2013	558.138,99 €	5,73	4,5718%	6,9908%	2,8150%	431.931,37 €	378.846,93 €	475.999,85 €

Tabela 5.7 - Cash flows da OT 5,45% Set 2013 actualizados, duração e convexidade

A seguinte tabela ilustra as variações no valor líquido para cada cenário base.

	Variação Activo	Variação Passivo	var. absl.	var. rel
Cenário asc.	-639.286,68 €	-875.993,63 €	236.706,96 €	4,23%
Cenário desc.	583.860,34 €	889.543,08 €	-305.682,75 €	-5,46%

Tabela 5.8 - Variação líquida na estratégia de diversificação do investimento

Logo, a carga de capital seria de 305.683€

Como seria de esperar, o cenário mais gravoso é o descendente, uma vez que a duração de F&W do passivo é bastante superior à duração de F&W do activo.

Uma estratégia de imunização, em que se acrescenta a restrição $D_{FW}(A) = D_{FW}(L)$ ao problema (5.4), poderá diminuir significativamente a carga de capital.

Exemplo 2 : Imunização de F&W de 1ª ordem

Tendo em conta as seguintes restrições,

$$\text{Min} \sum_{i=1}^{10} p_i^2 \quad (5.5)$$

$$s.a: A_0 = L_0; D_{FW}(A) = D_{FW}(L); \sum_{i=1}^{10} p_i = 1; p_i \geq 0,$$

obtém-se a seguinte estratégia de investimento

		soma quadrado 0,152154	var. rel -15,72%	15,89%		
			var. absl. -879.989,15 €	889.303,72 €		
Obrigações		100,00%	5.597.607,69 €	4.717.618,53 €	6.486.911,40 €	8,51 132,72
Descrição	Quantidade	Peso	VP inicial	VP asc.	VP desc.	D _{FW} Convex.
OT 5,375% Jun 2008	116.917	2,15%	120.488,18 €	118.127,13 €	121.831,29 €	0,46 0,64
OT 3,95% Jul 2009	219.992	3,96%	221.813,91 €	209.744,40 €	229.239,14 €	1,44 3,47
OT 5,85% Mai 2010	0	0,00%	0,21 €	0,20 €	0,22 €	2,13 6,80
OT 5,15% Jun 2011	408.222	7,64%	427.516,85 €	390.516,37 €	454.062,59 €	3,04 12,68
OT 5% Jun 2012	496.427	9,27%	518.692,52 €	467.791,16 €	558.040,31 €	3,84 19,46
OT 5,45% Set 2013	403.396	7,62%	426.682,13 €	379.089,66 €	465.363,27 €	4,81 29,68
OT 3,35% Out 2015	711.417	11,75%	657.536,43 €	568.977,03 €	734.952,56 €	6,59 53,20
OT 4,35% Out 2017	873.391	15,31%	856.717,10 €	730.721,45 €	974.077,42 €	7,72 74,50
OT 3,85% Abr 2021	1.029.695	17,17%	961.060,44 €	787.613,55 €	1.133.832,89 €	9,71 121,42
OT 4,10% Abr 2037	1.551.438	25,14%	1.407.099,91 €	1.065.037,59 €	1.815.511,70 €	15,38 354,19

Tabela 5.9 - Estratégia de imunização de F&W

Logo, tem-se que

	Variação Activo	Variação Passivo	Var. absl.	Var. rel
Cenário asc.	-879.989,15 €	-875.993,63 €	-3.995,52 €	-0,07%
Cenário desc.	889.303,72 €	889.543,08 €	-239,36 €	0,00%

Tabela 5.10 - Variação líquida na estratégia de imunização de F&W

Nesta estratégia, a carga de capital seria menos de 4.000€

A simetria relativa dos cenários implica que, à medida que um cenário se torna menos volátil para a carteira, o outro também tende a ser menos volátil.

Uma vez que os choques são também relativamente simétricos, pode tentar compor-se uma carteira em que a convexidade do activo $C(A)$ seja superior à convexidade do passivo $C(L)$.

Exemplo 3: Imunizar com $C(A) \geq C(L)$

Tendo em conta o seguinte problema de minimização,

$$\begin{aligned} & \text{Min} \sum_{i=1}^{10} p_i^2 \\ & \text{s.a: } A_0 = L_0; D_{FW}(A) = D_{FW}(L); C(A) \geq C(L); \sum_{i=1}^{10} p_i = 1; p_i \geq 0 \end{aligned} \quad (5.6)$$

obtém-se a seguinte estratégia de investimento

		soma quadrado	var. rel	-15,42%	15,92%		
		0,169874	var. absl.	-863.221,94 €	891.209,55 €		
Obrigações		100,00%	5.597.607,69 €	4.734.385,75 €	6.488.817,24 €	8,51	141,93
Descrição	Quantidade	Peso	VP inicial	VP asc.	VP desc.	D _{FW}	Convex.
OT 5,375% Jun 2008	459.376	8,46%	473.406,42 €	464.129,66 €	478.683,58 €	0,46	0,64
OT 3,95% Jul 2009	487.362	8,78%	491.398,71 €	464.660,33 €	507.848,29 €	1,44	3,47
OT 5,85% Mai 2010	0	0,00%	0,00 €	0,00 €	0,00 €	2,13	6,80
OT 5,15% Jun 2011	77.709	1,45%	81.381,64 €	74.338,27 €	86.434,86 €	3,04	12,68
OT 5% Jun 2012	537.536	10,03%	561.644,70 €	506.528,28 €	604.250,83 €	3,84	19,46
OT 5,45% Set 2013	0	0,00%	0,00 €	0,00 €	0,00 €	0,00	0,00
OT 3,35% Out 2015	732.983	12,10%	677.469,08 €	586.225,08 €	757.232,01 €	6,59	53,20
OT 4,35% Out 2017	788.521	13,82%	773.467,29 €	659.715,02 €	879.423,35 €	7,72	74,50
OT 3,85% Abr 2021	977.517	16,30%	912.359,72 €	747.702,06 €	1.076.377,11 €	9,71	121,42
OT 4,10% Abr 2037	1.793.322	29,06%	1.626.480,13 €	1.231.087,05 €	2.098.567,20 €	15,38	354,19

Tabela 5.11 - Estratégia de imunização com $C(A) \geq C(L)$

Os efeitos líquidos na carteira são:

	Variação Activo	Variação Passivo	Var. absl.	Var. rel.
Cenário asc.	-863.221,94 €	-875.993,63 €	12.771,69 €	0,23%
Cenário desc.	891.209,55 €	889.543,08 €	1.666,47 €	0,03%

Tabela 5.12 - Variação líquida na estratégia de imunização com $C(A) \geq C(L)$

Ambos os cenários implicam uma variação positiva no valor líquido; logo, nesta situação não seria necessária qualquer carga adicional.

Na prática, nem todos os activos que estão a representar as provisões técnicas são títulos de rendimento fixo (ou derivados de taxa de juro). Daqui resulta que o valor do activo a incluir no exercício é normalmente inferior ao do passivo; deste modo, consideremos o caso em que $A_0 < L_0$.

Exemplo 4 : Imunização com $A_0 < L_0$

Para efeitos de ilustração considere-se que

$$A_0 = 0,75L_0 \quad (5.7)$$

Formalizando o problema, vem

$$\text{Min} \sum_{i=1}^{10} p_i^2 \quad (5.8)$$

$$s.a: \quad A_0 = 0,75L_0 = 4.198.205,76; \quad D_{FW}(A) = \frac{L_0}{A_0} D_{FW}(L) = 11,35; \quad \sum_{i=1}^{10} p_i = 1; \quad p_i \geq 0$$

o que origina a seguinte estratégia de investimento

		soma quadrado	var. rel	-19,49%	21,08%		
		0,299112	var. absl.	-818.437,73 €	884.923,24 €		
Obrigações		100,00%	4.198.205,76 €	3.379.768,04 €	5.083.129,01 €	11,35	203,20
Descrição	Quantidade	Peso	VP inicial	VP asc.	VP desc.	D _{FW}	Convex.
OT 5,375% Jun 2008	0	0,00%	0,20 €	0,19 €	0,20 €	0,46	0,64
OT 3,95% Jul 2009	0	0,00%	0,19 €	0,18 €	0,20 €	1,44	3,47
OT 5,85% Mai 2010	0	0,00%	0,21 €	0,20 €	0,22 €	2,13	6,80
OT 5,15% Jun 2011	0	0,00%	0,21 €	0,19 €	0,22 €	3,04	12,68
OT 5% Jun 2012	0	0,00%	0,20 €	0,18 €	0,22 €	3,84	19,46
OT 5,45% Set 2013	0	0,00%	0,21 €	0,19 €	0,23 €	4,81	29,68
OT 3,35% Out 2015	656.387	14,45%	606.673,75 €	524.964,72 €	678.101,48 €	6,59	53,20
OT 4,35% Out 2017	733.475	17,14%	719.471,65 €	613.660,41 €	818.030,94 €	7,72	74,50
OT 3,85% Abr 2021	1.150.970	25,59%	1.074.251,15 €	880.376,22 €	1.267.372,20 €	9,71	121,42
OT 4,10% Abr 2037	1.982.224	42,82%	1.797.807,99 €	1.360.765,55 €	2.319.623,10 €	15,38	354,19

Tabela 5.13 - Estratégia de imunização com $A_0 < L_0$

	Variação Activo	Variação Passivo	Var. absl.	Var. rel
Cenário asc.	-818.437,73 €	-875.993,63 €	57.555,90 €	1,37%
Cenário desc.	884.923,24 €	889.543,08 €	-4.619,84 €	-0,11%

Tabela 5.14 - Variação líquida na estratégia de imunização com $A_0 < L_0$

Agora, a carga de capital seria apenas de 0,11% do valor total dos activos de rendimento fixo. No entanto, a estratégia apresenta um elevado nível de concentração em títulos de longo prazo (o que seria de esperar, dado que se pretende obter uma duração mais elevada).

Se não fosse considerada a restrição $D_{FW}(A) = 11,35$, a carga de capital seria superior a 450.000€ ou seja, bastante elevada.

5.5 Exercício de risco de taxa de juro no modelo de duração direccional

Recorrendo ao modelo de duração direccional de Reitano, será testada a capacidade de previsão dos parâmetros do modelo face aos cenários propostos pelo QIS4.

De seguida, vai obter-se o vector de direcção colinear ao vector de duração total das estratégias de imunização definidas anteriormente, com o objectivo de se avaliar o seu impacto nas mesmas, tendo em conta se os novos cenários representam ou não uma EPTJ credível.

5.5.1 Definição do vector de direcção

Para as taxas chave (*key rates*) do vector de direcção consideram-se as maturidades da EPTJ da Tabela 5.1. Os elementos do vector de direcção para os restantes prazos serão obtidos por interpolação linear.

Uma vez definido o método de interpolação, define-se o valor de Δi que corresponderá ao cenário ascendente e ao cenário descendente.

Para esse efeito, definimos

$$\Delta i = 0,01 \quad (5.9)$$

A escolha deve-se ao facto de que com $\Delta i = 0,01$ a duração direccional é consistente com a definição de duração modificada, ou seja, que a duração representa aproximadamente a variação percentual no valor de uma obrigação (de cupão fixo) se a EPTJ sofrer um choque de 100 pontos base.

Por fim, falta definir os vectores de direcção para cada cenário.

Relembrando, tem-se que $\vec{i}_0 = (i_{0,1}, i_{0,2}, \dots, i_{0,m})$ é o vector das taxas no momento inicial para os diversos prazos e $\vec{i}_0 + \Delta i \vec{N} = (i_{0,1} + \Delta i \times n_1, i_{0,2} + \Delta i \times n_2, \dots, i_{0,75} + \Delta i \times n_m)$ é a nova EPTJ - após o choque de intensidade Δi na direcção de \vec{N} , com $\vec{N} = (n_1, n_2, \dots, n_m)$.

Logo, se $i_{0,t}^*$ representar a nova taxa resultante de um choque instantâneo no momento zero para a maturidade t e n_t for o respectivo elemento do vector de direcção \vec{N} , vem

$$n_t = \frac{(i_{0,t}^* - i_{0,t})}{\Delta i}. \quad (5.10)$$

Dada a expressão anterior e tendo em conta (5.9) obtêm-se os vectores de direcção para ambos os cenários, veja-se o Anexo 3. Embora os restantes elementos do vector direcção sejam obtidos por interpolação linear, pressupõe-se que a EPTJ inicial é dada pelo *spline* cúbico da Tabela 5.

5.5.2 Duração e convexidade direccionais da carteira

As durações e convexidades direccionais resultantes do passivo encontram-se na Tabela 5.15.

Note ainda que

$$\text{Aprox. } 1^\circ = -\Delta i \times D_{\vec{N}}(\vec{i}_0),$$

$$\text{Aprox. } 2^\circ = -\Delta i \times D_{\vec{N}}(\vec{i}_0) + 1/2 \left(C_{\vec{N}}(\vec{i}_0) \right) \Delta i^2 \text{ e}$$

$$\text{Aprox. log. } 2^\circ = e^{-D_{\vec{N}}(\vec{i}_0) \Delta i + \frac{1}{2} [C_{\vec{N}}(\vec{i}_0) - D_{\vec{N}}^2(\vec{i}_0)] (\Delta i)^2} - 1,$$

$$\text{com } \sum_{t=1}^{75} \sum_{k=1}^{75} n_t n_k \left. \frac{\partial^2 P(\vec{i})}{\partial i_t \partial i_k} \right|_{i_t=i_{0,t}, i_k=i_{0,k}} = 0, \forall t \neq k.$$

Quer dizer: as raízes características da matriz convexidade são dadas pelos elementos da diagonal principal e os vectores característicos unitários associados às mesmas são dados por e_j (vector onde o elemento da j – ésima linha é 1 e os restantes elementos são 0).

As durações e convexidades direccionais dos títulos para os cenários ascendente e descendente estão apresentadas nas Tabelas 5.15 e 5.16, respectivamente. Como se pode verificar, os parâmetros do modelo originam estimativas bastante próximas da situação real, sobretudo se se tiver em conta a aproximação de segunda ordem do logaritmo da função-preço.

<div> <div> D(desc.)_{cauchy} = N_{desc.} * VDT =17,62 </div> <div> D(asc.)_{cauchy} = N_{asc.} * VDT =23,05 </div> </div>											
D _N (desc.)	-14,00	Aprox. 1°	14,00%	Aprox. log.2°	PASSIVO			N _{asc.}		N _{desc.}	
C _N (desc.)	338,66	Aprox. 2°	15,698%	15,856%	variação rel.	-15,664%	15,898%	14,911		11,400	
D _N (asc.)	17,97	Aprox. 1°	-17,970%	Aprox. log.2°	variação absl.	-876.800,22 €	889.882,33 €	VDT		1,55	
C _N (asc.)	519,722	Aprox. 2°	-15,371%	-15,622%	5.597.607,69 €	4.720.807,47 €	6.487.490,02 €	Soma(VDT)=D _{FW} =8,51		134,150	
										1,00	
Data	CF	t	Taxa s/choque	N asc.	N desc.	VP inicial	VP asc.	VP desc.	Vect. de dur. total	Convex.	N ₀
30-06-2008	521.418,99 €	0,499	4,7071%	4,4246	-2,401	509.596,16 €	499.187,16 €	515.523,83 €	0,043	0,062	0,028
30-06-2009	506.010,94 €	1,499	4,6150%	3,9510	-2,262	472.928,64 €	447.371,05 €	488.674,40 €	0,121	0,289	0,078
30-06-2010	488.867,95 €	2,499	4,4986%	3,2990	-2,056	437.967,20 €	405.241,39 €	460.261,35 €	0,187	0,626	0,121
30-06-2011	475.644,02 €	3,499	4,5229%	2,9615	-1,944	407.444,54 €	369.501,45 €	435.107,91 €	0,244	1,049	0,158
30-06-2012	456.045,46 €	4,501	4,5425%	2,6797	-1,862	373.390,44 €	333.184,71 €	404.858,81 €	0,287	1,511	0,186
30-06-2013	439.630,77 €	5,501	4,5653%	2,4653	-1,781	343.897,83 €	302.519,52 €	377.976,76 €	0,323	2,010	0,209
30-06-2014	421.324,42 €	6,501	4,5960%	2,3209	-1,724	314.587,69 €	272.756,58 €	350.475,48 €	0,349	2,505	0,226
30-06-2015	405.848,86 €	7,501	4,6326%	2,2003	-1,668	288.958,49 €	247.193,34 €	325.970,09 €	0,370	3,007	0,239
30-06-2016	384.712,23 €	8,504	4,6751%	2,1033	-1,613	260.847,79 €	220.247,52 €	297.667,58 €	0,379	3,437	0,245
30-06-2017	367.039,94 €	9,504	4,7199%	2,0289	-1,605	236.783,68 €	197.308,71 €	274.215,97 €	0,384	3,851	0,248
30-06-2018	345.560,76 €	10,504	4,7638%	2,0005	-1,619	211.945,99 €	173.753,90 €	249.629,05 €	0,380	4,169	0,246
30-06-2019	329.187,15 €	11,504	4,8029%	2,0169	-1,633	191.895,63 €	154.109,40 €	229.886,25 €	0,376	4,490	0,243
30-06-2020	313.252,79 €	12,507	4,8360%	2,0309	-1,644	173.530,41 €	136.508,28 €	211.461,32 €	0,370	4,765	0,239
30-06-2021	297.713,21 €	13,507	4,8648%	2,0430	-1,654	156.730,60 €	120.773,07 €	194.269,97 €	0,361	4,989	0,233
30-06-2022	281.446,01 €	14,507	4,8897%	2,0535	-1,662	140.808,28 €	106.286,46 €	177.531,83 €	0,348	5,143	0,225
30-06-2023	267.438,58 €	15,507	4,9107%	2,0374	-1,645	127.167,59 €	94.372,39 €	162.473,11 €	0,336	5,284	0,217
30-06-2024	252.255,44 €	16,510	4,9284%	1,9954	-1,626	113.999,41 €	83.527,79 €	147.537,71 €	0,320	5,347	0,207
30-06-2025	239.136,75 €	17,510	4,9444%	1,9524	-1,606	102.720,67 €	74.385,01 €	134.571,33 €	0,306	5,400	0,198
:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:
:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:

Tabela 5.15 - Duração, Convexidade e aproximações no modelo direccional do passivo

Descrição	VP inicial	VP asc.	VP desc.	Δi 1,00%		Cenário ascendente			
				$D_{N(asc.)}$	$C_{N(asc.)}$	Aprox.1°	Aprox.2°	Aprox. log.	var. real
OT 5,375% Jun 2008	103.048 €	101.024 €	104.200 €	2,025	12,657	-2,025%	-1,962%	-1,963%	-1,964%
OT 3.95% Jul 2009	100.828 €	95.412 €	104.179 €	5,627	53,193	-5,627%	-5,361%	-5,370%	-5,372%
OT 5.85% Mai 2010	106.521 €	99.254 €	111.409 €	7,190	76,966	-7,190%	-6,805%	-6,820%	-6,822%
OT 5.15% Jun 2011	104.726 €	95.692 €	111.232 €	9,170	114,249	-9,170%	-8,598%	-8,624%	-8,626%
OT 5% Jun 2012	104.485 €	94.188 €	112.407 €	10,540	144,648	-10,540%	-9,817%	-9,853%	-9,855%
OT 5.45% Set 2013	105.773 €	93.943 €	115.387 €	12,042	181,776	-12,042%	-11,133%	-11,182%	-11,184%
OT 3.35% Out 2015	92.426 €	79.959 €	103.312 €	14,699	258,321	-14,699%	-13,407%	-13,487%	-13,489%
OT 4.35% Out 2017	98.091 €	83.631 €	111.538 €	16,214	316,207	-16,214%	-14,633%	-14,741%	-14,742%
OT 3.85% Abr 2021	93.334 €	76.482 €	110.123 €	20,421	518,523	-20,421%	-17,829%	-18,056%	-18,056%
OT 4.10% Abr 2037	90.696 €	68.643 €	117.022 €	29,600	1230,000	-29,600%	-23,450%	-24,294%	-24,316%

Tabela 5.16 - Duração, convexidade e aproximações no modelo direccionado do activo para o cenário ascendente

Descrição	VP inicial	VP asc.	VP desc.	Δi 1,00%		Cenário descendente			
				$D_{N(desc.)}$	$C_{N(desc.)}$	Aprox.1°	Aprox.2°	Aprox. log.	var. real
OT 5,375% Jun 2008	103.048 €	101.024 €	104.200 €	-1,099	3,726	1,099%	1,117%	1,118%	1,118%
OT 3.95% Jul 2009	100.828 €	95.412 €	104.179 €	-3,233	17,576	3,233%	3,321%	3,323%	3,324%
OT 5.85% Mai 2010	106.521 €	99.254 €	111.409 €	-4,437	29,392	4,437%	4,584%	4,588%	4,588%
OT 5.15% Jun 2011	104.726 €	95.692 €	111.232 €	-5,961	48,510	5,961%	6,204%	6,211%	6,212%
OT 5% Jun 2012	104.485 €	94.188 €	112.407 €	-7,226	68,486	7,226%	7,568%	7,581%	7,582%
OT 5.45% Set 2013	105.773 €	93.943 €	115.387 €	-8,601	93,775	8,601%	9,069%	9,089%	9,090%
OT 3.35% Out 2015	92.426 €	79.959 €	103.312 €	-11,007	146,457	11,007%	11,739%	11,777%	11,777%
OT 4.35% Out 2017	98.091 €	83.631 €	111.538 €	-12,664	196,798	12,664%	13,648%	13,708%	13,709%
OT 3.85% Abr 2021	93.334 €	76.482 €	110.123 €	-16,187	332,952	16,187%	17,851%	17,988%	17,987%
OT 4.10% Abr 2037	90.696 €	68.643 €	117.022 €	-24,161	845,790	24,161%	28,390%	29,009%	29,026%

Tabela 5.17 - Duração, convexidade e aproximações no modelo direccionado do activo para o cenário descendente

5.5.3 Estratégia de imunização no modelo de duração direccionado

Se os cenários propostos corresponderem à versão final do modelo standard para o risco de taxa de juro (note que os cenários do QIS4, Tabela 5.2, são os mesmos do QIS3), então, é possível definir as respectivas durações direccionais da carteira.

Embora não se conheça à partida exactamente qual será a estrutura que virá a ser utilizada para o exercício, desde que não haja grandes diferenças entre esta e a EPTJ usada na determinação da estratégia, as diferenças nos resultados não serão materiais.

Portanto, se se pretender minimizar a carga de capital para o risco de taxa de juro poderá adoptar-se a seguinte estratégia de investimento, pressupondo, tal como se fez anteriormente, que $A_0 = 0,75L_0$.

Exemplo 5 : Modelo de duração direccional

Dado que o cenário que tende a ser mais gravoso é o cenário de descida das taxas de juro (pois o valor do activo é significativamente inferior ao do passivo), definem-se as seguintes restrições,

$$A_0 = 0,75L_0; \quad D_{\bar{N}(\text{desc.})}(A) = \frac{D_{\bar{N}(\text{desc.})}(L)}{0,75}; \quad \sum_{j=1}^{10} p_i = 1; \quad p_i \geq 0 \quad (5.11)$$

A estratégia do Exemplo 5 resulta na seguinte composição do investimento:

		soma quadrado							
		0,319	4.198.206 €	3.365.610 €	5.108.802 €	23,302	793,396	-18,673	532,784
Descrição	Quantidade	Peso	VP inicial	VP asc.	VP desc.	D _{N(asc.)}	C _{N(asc.)}	D _{N(desc.)}	C _{N(desc.)}
OT 5,375% Jun 2008	0	0,00%	0,00 €	0,00 €	0,00 €	0,000	0,000	0,000	0,000
OT 3,95% Jul 2009	0	0,00%	0,00 €	0,00 €	0,00 €	0,000	0,000	0,000	0,000
OT 5,85% Mai 2010	0	0,00%	0,00 €	0,00 €	0,00 €	0,000	0,000	0,000	0,000
OT 5,15% Jun 2011	0	0,00%	0,00 €	0,00 €	0,00 €	0,000	0,000	0,000	0,000
OT 5% Jun 2012	0	0,00%	0,00 €	0,00 €	0,00 €	10,540	144,648	-7,226	68,487
OT 5,45% Set 2013	226.753	5,71%	239.842,85 €	213.018,95 €	261.644,80 €	12,042	181,776	-8,601	93,775
OT 3,35% Out 2015	389.874	8,58%	360.345,86 €	311.740,27 €	402.785,07 €	14,699	258,321	-11,007	146,457
OT 4,35% Out 2017	622.459	14,54%	610.575,84 €	520.567,20 €	694.278,05 €	16,214	316,207	-12,664	196,798
OT 3,85% Abr 2021	1.014.173	22,55%	946.572,60 €	775.662,91 €	1.116.836,28 €	20,421	518,523	-16,187	332,952
OT 4,10% Abr 2037	2.250.218	48,61%	2.040.868,61 €	1.544.620,80 €	2.633.258,05 €	29,600	1230,000	-24,161	845,790

Tabela 5.18 - Estratégia de imunização no modelo direccional

Logo,

	Variação Activo	Variação Passivo	Diferença	var. rel.
Cenário asc.	-832.595,62 €	-876.800,22 €	44.205 €	1,05%
Cenário desc.	910.596,50 €	889.882,33 €	20.714 €	0,49%

Tabela 5.19 - Variação líquida na estratégia de imunização direccional

5.5.4 Vector colinear da carteira (\vec{N}_0) dos Exemplos 2, 3 e 4

Relembrando (ponto 2.3.2) que $\vec{N}_0 = \vec{D}(i_0) / \|\vec{D}(i_0)\|$, obter-se-á o vector colinear das estratégias dos Exemplos 2, 3 e 4, para que seja avaliado o seu impacto nas mesmas.

Para efeitos de simplificação, os cash flows serão agregados para as maturidades chave mais próximas.

No que diz respeito ao passivo, assume-se que os pagamentos ocorrem no fim de cada ano; no entanto, de modo a considerar cash flows durante o ano de 2008, o primeiro pagamento será repartido de igual modo entre a maturidade $t = 0,5$ e $t = 1$.

Os vectores colineares unitários das estratégias 2, 3 e 4 encontram-se no Anexo 4.

Os elementos destes vectores serão positivos (negativos) quando a diferença entre o activo e passivo, para uma dada maturidade, for positiva (negativa).

Para cada estratégia serão testados os vectores colineares de norma 1 e de norma 11,815 (a norma do vector de direcção do cenário descendente, considerando que o primeiro elemento é nulo) e $\Delta i = 0,01$.

A seguinte tabela resume os resultados obtidos

	Variação líquida da carteira			
	Cenário asc.	Cenário desc.	$\ \vec{N}_0\ = 1$	$11,815 \times \ \vec{N}_0\ = 1$
Estratégia 2	-3.995,52 €	-239,36 €	-87.813,29 €	-725.440,78 €
Estratégia 3	12.771,69 €	1.666,47 €	-94.589,18 €	-726.584,73 €
Estratégia 4	57.555,90 €	-4.619,84 €	-124.465,76 €	-776.880,12 €

Tabela 5.20 - Efeitos na variação líquida dos vectores colineares (Exemplos 2, 3 e 4)

Uma carteira que aparentemente estaria imunizada sofre uma forte desvalorização se os choques forem de natureza paralela ao vector de duração total.

Falta, no entanto, avaliar se as novas taxas representam uma estrutura credível, uma vez que o modelo considera que as taxas chave se podem movimentar de forma independente e o método de interpolação das restantes taxas é perfeitamente flexível.

Considere-se a EPTJ obtida pelo vector de direcção $11,815 \times \|\vec{N}_0\|$ da estratégia do

Exemplo 2:

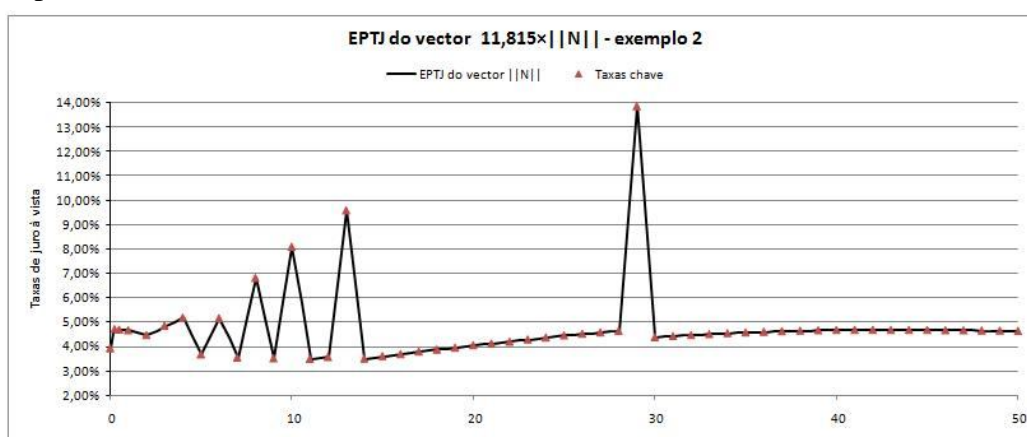


Figura 5.5 - EPTJ do vector colinear de direcção de norma 11,815 do Exemplo 2

Estruturas desta natureza serão altamente improváveis e portanto não devem ser consideradas num processo de imunização. No entanto, é importante que se tenha em conta que, para além da dimensão do choque, a direcção é um elemento determinante para se avaliar a exposição de uma determinada carteira ao risco de taxa de juro.

5.6 Modelo vector de durações (sob a hipótese do modelo de Svensson)

Para se estimar a variação percentual instantânea, é necessário atribuir uma forma funcional às estruturas propostas no QIS4, veja-se (2.36). Para esse efeito, optou-se pelo

modelo Svensson (MS) pois este é suficientemente flexível para se ajustar a uma dada estrutura e ao mesmo tempo é facilmente implementado.

5.6.1 Análise dos cenários propostos pelo QIS4

Para se aplicar o modelo vector de durações é necessário converter as taxas iniciais de capitalização discreta em taxas de capitalização contínua, tendo em conta a relação:

$i_t^* = \ln(1+i_t)$, i_t^* a taxa de capitalização contínua e i_t a taxa de capitalização discreta.

Posto isto, introduziu-se na ferramenta *Solver* do Excel o problema de minimização

$$\underset{\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \alpha, \lambda}{Min} \sum_{t=0,25}^{75} \varepsilon_t^2,$$

$$\text{s. a: } \beta_0 > 0; \quad \beta_0 + \beta_1 > 0; \quad \alpha > 0,$$

ε_t a diferença entre a taxa proposta pelo QIS4 e a taxa obtida pela expressão

$$y^{sv}(t) = \beta_0 + (\beta_1 + \beta_2) \frac{\alpha}{t} (1 - e^{-t/\alpha}) - \beta_2 e^{-t/\alpha} + \frac{\beta_3}{\alpha} \left[-\lambda e^{-t/\lambda} + \frac{\lambda^2}{t} (1 - e^{-t/\lambda}) \right] \quad (5.12)$$

que traduz a forma funcional das taxas de juro à vista do MS.

Os parâmetros obtidos para os três cenários (inicial, ascendente e descendente) estão na Tabela 5.2.1.

EPTJ inicial		EPTJ asc.		EPTJ desc.	
B ₀	0,039104	B ₀	0,053622	B ₀	0,026957
B ₁	0,006316	B ₁	0,035705	B ₁	-0,005167
B ₂	0,542146	B ₂	0,486907	B ₂	0,332129
α	6,966302	α	6,408074	α	7,323233
B ₃	-0,525171	B ₃	-0,503103	B ₃	-0,307515
λ	6,665464	λ	5,853419	λ	7,019055
100×Σξ _t	0,521035	100×Σξ _t	2,908401	100×Σξ _t	0,111572

Tabela 5.21 - Parâmetros do MS para os três cenários: inicial, ascendente e descendente

Graficamente, vem

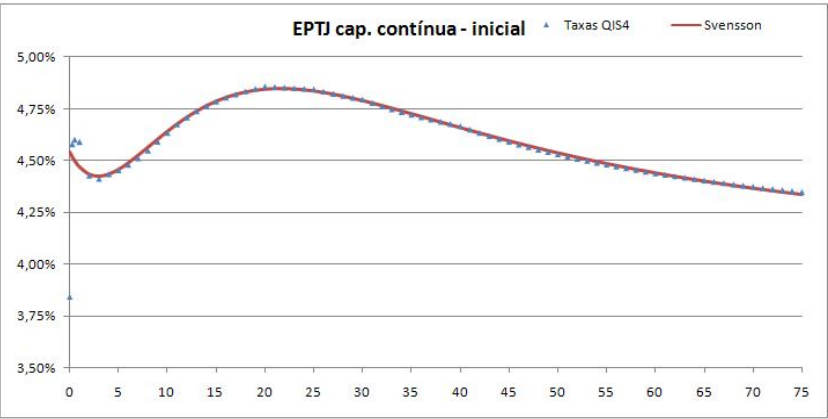


Figura 5.6 - EPTJ do cenário inicial no MS

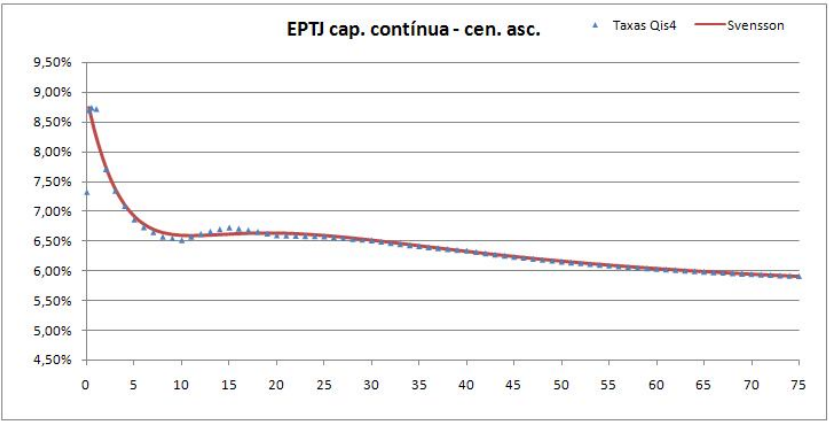


Figura 5.7 - EPTJ do cenário ascendente no MS

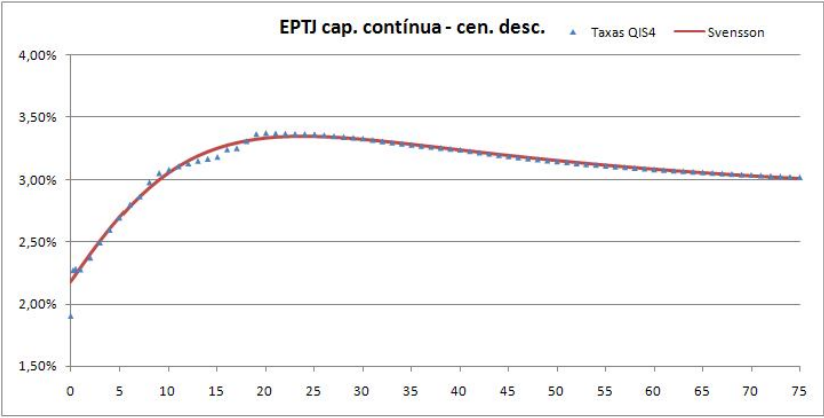


Figura 5.8 - EPTJ do cenário descendente no MS

O impacto dos cenários e as durações de ordens superiores para o passivo encontram-se nas Tabelas 5.22 e 5.23 respectivamente. Os valores presentes para cada cenário não diferem muito dos obtidos através da interpolação cúbica, o que mostra a capacidade de ajustamento da forma funcional atribuída à EPTJ.

VP inicial	VP cen. asc.	VP cen. desc.
5.597.459,20 €	4.721.031,32 €	6.487.309,82 €
Variação absl.	-876.427,87 €	889.850,63 €
Variação rel.	-15,66%	15,90%

Tabela 5.22 - Impacto no passivo dos três cenários (inicial, ascendente e descendente) no MS

D _t (1)	D _t (2)	D _t (3)	D _t (4)	D _t (5)
8,921	138,67	2.864	70.570	1.963.487
D _t (6)	D _t (7)	D _t (8)	D _t (9)	D _t (10)
59.732.705	1.946.114.426	66.941.842.047	2.406.087.997.558	89.668.299.525.489

Tabela 5.23 - Duração de ordens superiores do passivo no MS

Recorde-se que as durações de ordem superior são dadas pela expressão (2.37), e portanto não dependem de uma forma funcional para a EPTJ.

5.6.2 Qualidade da aproximação aos choques no modelo vector de durações

Tal como no modelo direccional, iremos testar a qualidade de previsão dos parâmetros do modelo vector de durações para o cenário ascendente e para o cenário descendente.

Deste modo, é necessário calcular o vector dos choques tendo em conta a forma funcional das taxas futuras no MS. Para esse efeito, utilizou-se um software específico (Mathematica versão 5.2) para se obter a expansão até à décima ordem. Obtiveram-se os vectores seguintes:

Y	Cen. asc	Cen. Desc.
y ₁	-4,3908E-02	2,3630E-02
y ₂	7,7972E-03	-0,001780538
y ₃	-1,1631E-03	0,000191388
y ₄	1,3329E-04	-9,91763E-06
y ₅	-1,4256E-05	7,68984E-08
y ₆	1,5286E-06	3,43283E-08
y ₇	-1,6074E-07	-3,56401E-09
y ₈	1,6287E-08	2,05094E-10
y ₉	-1,5998E-09	-5,97028E-12
y ₁₀	1,53765E-10	-1,8799E-13

Tabela 5.24 - Vector de choques para os cenários ascendente e descendente de ordem 10

Os resultados para a carteira de obrigações estão traduzidos na Tabela 5.25, supondo que foram investidas 100 mil unidades em cada título (note-se que, para os devidos efeitos, a quantidade considerada é irrelevante).

Embora se haja obtido boas aproximações para maturidades curtas, para maturidades superiores a dez anos (no cenário descendente) os parâmetros do modelo não prevêm eficazmente os efeitos do choque, mesmo com $M = 10$. No cenário ascendente, as aproximações só são aceitáveis para maturidades inferiores a 7 anos.

				$\sum Y_i \times D(i)$				var. rel. real
Descrição	Quantidade	VP inicial	VP cen. asc.	M=1	M=3	M=5	M=10	
OT 5,375% Jun 2008	100.000,00 €	103.095,97 €	101.097,86 €	-2,1052%	-1,9388%	-1,9381%	-1,9381%	-1,9381%
OT 3.95% Jul 2009	100.000,00 €	100.915,53 €	95.714,54 €	-6,5934%	-5,2157%	-5,1555%	-5,1538%	-5,1538%
OT 5.85% Mai 2010	100.000,00 €	106.469,47 €	99.184,14 €	-9,7781%	-7,1530%	-6,8629%	-6,8426%	-6,8427%
OT 5.15% Jun 2011	100.000,00 €	104.716,56 €	95.666,53 €	-13,9484%	-9,8608%	-8,8082%	-8,6416%	-8,6424%
OT 5% Jun 2012	100.000,00 €	104.481,16 €	94.105,65 €	-17,611%	-12,953%	-10,612%	-9,919%	-9,931%
OT 5.45% Set 2013	100.000,00 €	105.732,90 €	93.747,82 €	-22,077%	-18,533%	-14,000%	-11,173%	-11,335%
OT 3.35% Out 2015	100.000,00 €	92.336,34 €	79.656,62 €	-30,272%	-35,746%	-28,783%	-9,439%	-13,732%
OT 4.35% Out 2017	100.000,00 €	98.028,89 €	83.207,06 €	-35,479%	-58,957%	-61,904%	26,669%	-15,120%
OT 3.85% Abr 2021	100.000,00 €	93.320,68 €	76.857,76 €	-44,675%	-130,541%	-237,542%	888,463%	-17,641%
OT 4.10% Abr 2037	100.000,00 €	90.739,02 €	68.623,64 €	-70,878%	-909,325%	-7943,376%	1634764,443%	-24,373%

				$\sum Y_i \times D(i)$				var. rel. real
Descrição	Quantidade	VP inicial	VP cen. desc.	M=1	M=3	M=5	M=10	
OT 5,375% Jun 2008	100.000,00 €	103.095,97 €	104.223,89 €	1,1329%	1,0941%	1,0940%	1,0940%	1,0940%
OT 3.95% Jul 2009	100.000,00 €	100.915,53 €	104.147,16 €	3,5483%	3,2076%	3,2023%	3,2023%	3,2023%
OT 5.85% Mai 2010	100.000,00 €	106.469,47 €	111.306,88 €	5,2622%	4,5714%	4,5430%	4,5435%	4,5435%
OT 5.15% Jun 2011	100.000,00 €	104.716,56 €	111.194,01 €	7,5064%	6,3027%	6,1821%	6,1857%	6,1857%
OT 5% Jun 2012	100.000,00 €	104.481,16 €	112.366,67 €	9,4774%	7,8526%	7,5329%	7,5473%	7,5473%
OT 5.45% Set 2013	100.000,00 €	105.732,90 €	115.425,10 €	11,881%	9,933%	9,112%	9,166%	9,167%
OT 3.35% Out 2015	100.000,00 €	92.336,34 €	103.530,75 €	16,291%	14,637%	11,832%	12,112%	12,124%
OT 4.35% Out 2017	100.000,00 €	98.028,89 €	111.784,13 €	19,093%	19,295%	13,179%	13,921%	14,032%
OT 3.85% Abr 2021	100.000,00 €	93.320,68 €	109.726,89 €	24,042%	32,038%	13,998%	15,246%	17,580%
OT 4.10% Abr 2037	100.000,00 €	90.739,02 €	117.119,53 €	38,143%	157,503%	-48,377%	-3624,583%	29,073%

Tabela 5.25 - Aproximações à variação percentual instantânea no modelo vector de durações

Também se tentou calcular o vector dos choques para EPTJ de interpolação cúbica, pois a forma de Y_1 , Y_2 e Y_3 quando a EPTJ é dada por um polinómio de terceiro grau, é bastante simples (recorde-se ainda que o grau do polinómio para as taxas à vista e taxas futuras é mesmo). Para que o *spline* tenha a forma $A_0 + A_1 \times t + A_2 \times t^2 + A_3 \times t^3$ é necessária a seguinte alteração

$$A_{j,0} = a_j - b_j t_j + c_j t_j^2 + d_j t_j^3$$

$$A_{j,1} = (b_j - 2c_j t_j + 3d_j t_j^2)$$

$$A_{j,2} = (c_j - 3d_j t_j)$$

$$A_{j,3} = d_j$$

No entanto, não se conseguiu obter uma boa aproximação, mesmo para maturidades curtas, o que se pode dever ao facto da EPTJ, neste caso, ser composta por segmentos.

5.7 Análise de cenários adicionais

No modelo direccionado observou-se que, para além da dimensão dos choques, se deve ter igualmente em conta o sentido dos mesmos.

Uma proposta de um modelo interno parcial para o risco de taxa de juro seria atribuir uma forma funcional (MS) à EPTJ e acrescentar alguns cenários para além dos 2 já propostos. A sua aplicação seria suficientemente simples para ser posta em prática por qualquer entidade e, ao mesmo tempo, a exposição ao risco de taxa de juro seria captada de uma forma mais abrangente. Por exemplo, adicionar uma estrutura “achatada”, uma estrutura “invertida” e uma estrutura com uma inclinação positiva acentuada (*steep*).

5.7.1 Cenários hipotéticos

Retome-se o problema quando o activo relevante para o exercício representa 75% do valor da carteira. Tendo em conta a forma funcional da EPTJ e as restrições do Exemplo 4, vem

		soma quadrado				
		0,30				
		100,00%	4.198.094,40 €	3.378.480,44 €	5.083.887,99 €	
Descrição	Quantidade	Peso	VP	VP UP	VP Down	
OT 5,375% Jun 2008	0	0,00%	0,10 €	0,10 €	0,10 €	
OT 3,95% Jul 2009	0	0,00%	0,10 €	0,09 €	0,10 €	
OT 5,85% Mai 2010	0	0,00%	0,11 €	0,10 €	0,11 €	
OT 5,15% Jun 2011	0	0,00%	0,10 €	0,09 €	0,11 €	
OT 5% Jun 2012	0	0,00%	0,10 €	0,09 €	0,11 €	
OT 5,45% Set 2013	0	0,00%	0,10 €	0,09 €	0,11 €	
OT 3,35% Out 2015	655.140	14,41%	604.931,97 €	521.862,06 €	678.270,97 €	
OT 4,35% Out 2017	738.770	17,25%	724.207,75 €	614.708,53 €	825.827,24 €	
OT 3,85% Abr 2021	1.149.240	25,55%	1.072.478,35 €	883.279,97 €	1.261.025,00 €	
OT 4,10% Abr 2037	1.979.827	42,79%	1.796.475,72 €	1.358.629,31 €	2.318.764,14 €	

Tabela 5.26 - Estratégia de imunização com $A_0 < L_0$ no MS

	Variação Activo	Variação Passivo	Var. absl.	Var. rel
cen. asc.	-819.613,96 €	-876.427,87 €	56.813,91 €	1,35%
cen. desc.	885.793,60 €	889.850,63 €	-4.057,03 €	-0,10%

Tabela 5.27 - Variação líquida da estratégia de imunização com $A_0 < L_0$ no MS

Agora, consideram-se três cenários adicionais: uma EPTJ, “steep”, “achatada” e “invertida”, com os seguintes parâmetros:

EPTJ invertida		EPTJ steep		EPTJ achatada	
B_0	0,0150	B_0	0,0500	B_0	0,0350
B_1	0,0600	B_1	-0,0350	B_1	-0,0030
B_2	0,0300	B_2	0,0500	B_2	0,0010
α	5,0000	α	15,0000	α	2,0000
B_3	0,0000	B_3	-0,0700	B_3	0,0100
λ	3,0000	λ	4,8000	λ	4,0000

Tabela 5.28 - Parâmetros dos cenários adicionais

Graficamente, vem

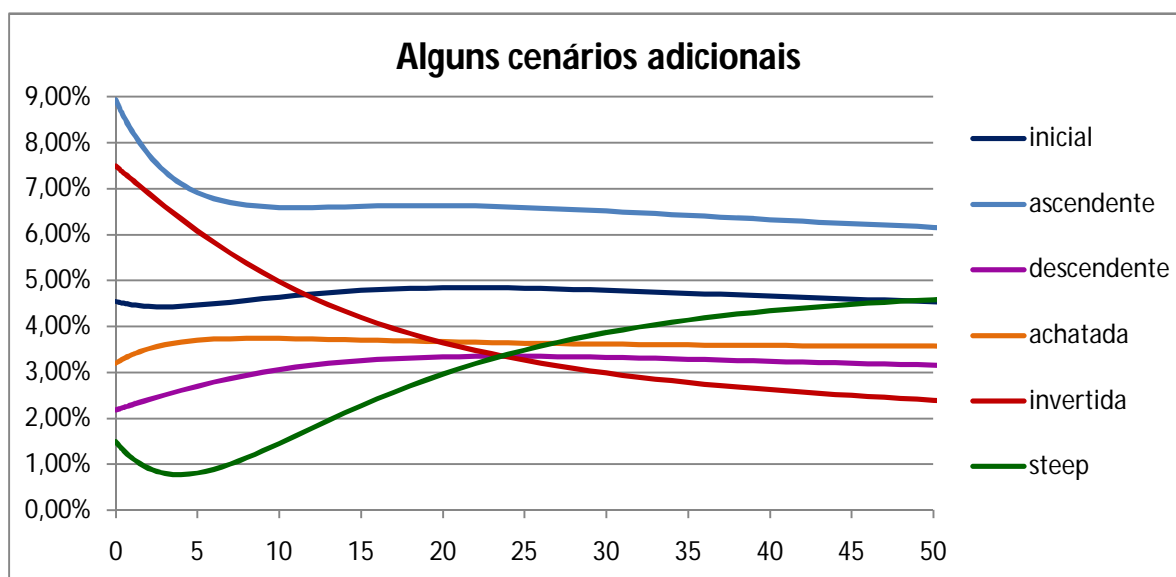


Figura 5.9 - EPTJ para diversos cenários

Os efeitos na carteira dos três cenários adicionais são

cenários	Variação Activo	Variação Passivo	Var. absl.	Var. rel.
invertida	375.132,86 €	198.842,41 €	176.290,46 €	4,20%
steep	1.309.693,44 €	1.430.497,82 €	-120.804,38 €	-2,88%
achatada	576.380,63 €	556.388,35 €	19.992,28 €	0,48%

Tabela 5.29 - Variação líquida dos cenários adicionais na estratégia de imunização com $A_0 < L_0$ no MS

Ou seja, se se considerar o cenário em que há um *steepening* da EPTJ, isto é, um aumento entre os *spreads* de curto e longo prazo, a carga de capital seria cerca de 120 mil euros.

Este cenário é mais gravoso, porque os cash flows do activo estão mais concentrados em maturidades longas, enquanto os cash flows dos passivos estão mais concentrados em maturidades mais curtas.

Considere-se ainda um exemplo extremo.

Exemplo 6 - Investir apenas no título OT 4,10% Abr 2037

Suponha-se que o activo a incluir no exercício era composto única e exclusivamente por 3.642.119,69 unidades de OT 4,10% Abr 2037 (veja-se o Anexo 5). Nesta estratégia, os parâmetros duração e convexidade foram ignorados e fez-se uso do conhecimento prévio dos choques propostos. Assim, através da ferramenta *Solver* do Excel procurou maximizar-se a soma $V_{asc.} + V_{desc.}$, sujeita à restrição $V_{asc.} = V_{desc.}$.

O quadro seguinte compara três cenários: ascendente, descendente e “*steep*”:

cenários	Variação Activo	Variação Passivo	Var. absl.	Var. rel.
crescente	-805.468,86 €	-876.427,87 €	70.959,02 €	2,15%
decrecente	960.809,64 €	889.850,63 €	70.959,02 €	2,15%
<i>steep</i>	1.013.137,71 €	1.430.497,82 €	-417.360,11 €	-12,63%

Tabela 5.30 - Variações líquidas tendo em conta os choques do QIS4 e o choque *steep*

Tanto para o cenário ascendente como para o cenário descendente a carteira valoriza no mesmo montante, quase 71 mil euros, enquanto para o cenário *steep* a desvalorização é superior a 400 mil euros...

5.7.2 Imunização de ordens superiores

Como se referiu atrás, no modelo vector de durações o processo de imunização é independente do processo estocástico que rege as taxas de juro. Se for permitida a realização de vendas a descoberto é possível construir uma carteira cujas durações satisfazem qualquer restrição de igualdade.

Exemplo 7 - Imunização de ordens superiores

Retomando o exemplo em que o activo relevante para o exercício representa 75% do passivo, formaliza-se o seguinte problema de minimização:

$$\text{Min} \sum_{i=1}^{10} p_i^2 \quad (5.13)$$

s.a:

$$\begin{aligned} p_1 \times D_{A1}(1) + p_2 \times D_{A2}(1) + \dots + p_{10} \times D_{A10}(1) &= \frac{D_L(1)}{0,75} \\ p_1 \times D_{A1}(2) + p_2 \times D_{A2}(2) + \dots + p_{10} \times D_{A10}(2) &= \frac{D_L(2)}{0,75} \\ \vdots \\ p_1 \times D_{A1}(M) + p_2 \times D_{A2}(M) + \dots + p_{10} \times D_{A10}(M) &= \frac{D_L(M)}{0,75} \\ \sum_{i=1}^{10} p_i &= 1, \end{aligned}$$

em que $D_{Ai}(m)$ é a duração de ordem m da obrigação i , enquanto $D_L(m)$ é a duração de ordem m do passivo.

Dado que todas as restrições são de igualdade (é permitida a venda a descoberto), a solução obtém-se facilmente tendo em conta os multiplicadores de Lagrange.

As proporções a serem investidas em cada obrigação para $M=1$, $M=3$ e $M=5$ são:

	M=1	M=3	M=5
	-5,98%	-15,25%	-446,25%
	-2,90%	-7,38%	482,23%
	-0,71%	-2,39%	430,21%
	2,16%	3,49%	47,25%
	4,68%	8,00%	-338,22%
	7,75%	12,79%	-531,74%
	13,39%	20,00%	-87,33%
	16,97%	22,68%	743,44%
	23,30%	25,55%	-237,60%
	41,32%	32,49%	38,02%
Soma	100,00%	100,00%	100,00%

Tabela 5.31 - Proporções a investir em cada título

A Tabela 5.32 regista os efeitos das estratégias de investimento nos vários cenários

M1	Cenário	Variação Activo	Variação Passivo	Var. absl.	Var. relativa
	ascendente	-831.406,54 €	-876.427,87 €	45.021,33 €	1,07%
	descendente	886.759,64 €	889.850,63 €	-3.090,98 €	-0,07%
	<i>steep</i>	1.337.592,49 €	1.430.497,82 €	-92.905,34 €	-2,21%
	invertido	329.027,86 €	198.842,41 €	130.185,45 €	3,10%
	achatado	567.626,60 €	556.388,35 €	11.238,25 €	0,27%

M3	Cenário	Variação Activo	Variação Passivo	Var. absl.	Var. relativa
	ascendente	-852.636,84 €	-876.427,87 €	23.791,03 €	0,57%
	descendente	882.727,39 €	889.850,63 €	-7.123,23 €	-0,17%
	<i>steep</i>	1.455.179,37 €	1.430.497,82 €	24.681,55 €	0,59%
	invertido	197.388,57 €	198.842,41 €	-1.453,84 €	-0,03%
	<i>achatado</i>	541.801,91 €	556.388,35 €	-14.586,43 €	-0,35%

M5	Cenário	Variação Activo	Variação Passivo	Var. absl.	Var. relativa
	<i>ascendente</i>	-991.973,65 €	-876.427,87 €	-115.545,77 €	-2,75%
	descendente	914.006,31 €	889.850,63 €	24.155,69 €	0,58%
	<i>steep</i>	1.388.077,31 €	1.430.497,82 €	-42.420,51 €	-1,01%
	invertido	218.833,26 €	198.842,41 €	19.990,86 €	0,48%
	achatado	628.355,34 €	556.388,35 €	71.966,99 €	1,71%

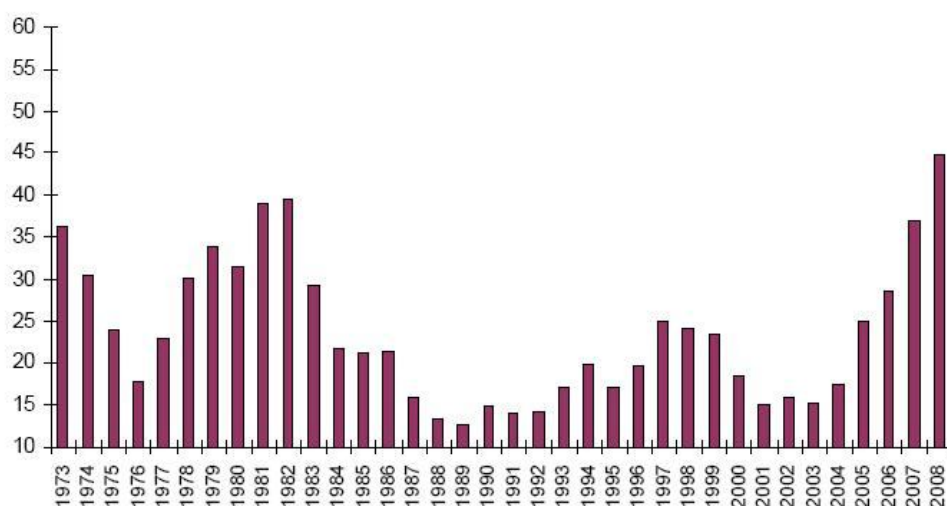
Tabela 5.32 - Impacto dos diversos cenários na estratégia de imunização de ordens superiores

À medida que se aumenta a ordem da imunização, a solução implica tomadas de posição cada vez mais extremas, o que põe em causa o próprio processo de imunização. Como se pode observar, para $M = 3$ o efeito líquido na carteira apresenta uma variabilidade bastante reduzida, mesmo tendo em conta os diversos cenários. Nesta situação, a carga de capital seria apenas de 14.586,43€

No entanto, suponha-se que o valor actual total do activo é igual ao valor actual do passivo e que os restantes 25% do investimento estão aplicados em acções do índice S&P 500, de modo a replicar o próprio índice em si.

Segundo Blitzer e Dash (2008) a duração para este índice em meados de 2007 e meados de 2008 seria cerca de 37 e 45 anos, respectivamente.

Exhibit 1: Duration of the U.S. Equity Market



Source: Standard & Poor's. Estimates are for the middle of each calendar year.

Figura 5.10 - Estimação da duração do Índice S&P 500
(Fonte: Standard & Poors 2008)

Ou seja, mesmo tendo uma sólida estratégia de imunização para os activos de rendimento fixo, é necessário ter-se em conta que todos os activos apresentam uma certa sensibilidade à EPTJ. Embora não haja um modelo que seja geralmente aceite no meio académico e/ou profissional e, para além do mais, muitos dos activos nem sequer estejam cotados, é importante ter-se a noção de que, mesmo considerando vários cenários, a carga de capital poderá não ser suficiente para cobrir por inteiro o risco de taxa de juro.

5.7.3 Comparação dos cenários do QIS4 com as EPTJ do Banco Central Europeu

Como foi referido, a calibração dos riscos do projecto de Solvência II pretende ter em conta um VaR a 99,5% (com um horizonte temporal a um ano). O que significa que em média os cenários propostos ocorrerão uma vez em cada 200 anos. Não obstante, é importante que se compare os cenários propostos pelo QIS4 e algumas estruturas já

observadas, de modo a comprovarmos empiricamente algumas ideias expostas ao longo do presente texto.

O modelo de Svensson é actualmente aplicado pelo Banco Central Europeu (BCE), que disponibiliza através do seu *site* as estimativas da EPTJ para a zona Euro tendo em conta obrigações governamentais e obrigações *corporate* de *rating* triplo A (risco de crédito mínimo).

Assim, iremos comparar algumas estratégias de investimento partindo da EPTJ inicial proposta pelo QIS4 com os cenários propostos pelo mesmo (tendo em conta o modelo de Svensson) e com 498 observações diárias da EPTJ disponibilizadas pelo BCE entre 29-12-2006 a 09-12-2008.

Note-se que, apesar do método utilizado pelo BCE (rendibilidade de obrigações) ser diferente do método utilizado pelo QIS4 (taxas *swap*), estas estruturas são igualmente válidas para se actualizarem os respectivos cash flows.

5.7.3.1 Um teste às condições de Redington

Tendo em conta as condições de Redington e a impossibilidade de vendas a descoberto, comparemos duas estratégias em que o valor do activo é igual ao valor do passivo.

Estratégia A

$$A_0 = L_0 = 5.597.459,20 \quad (5.14)$$

$$D(A) = D(L) = 8,921$$

$$C(A) = C(L) = 138,67$$

Ou seja, a estratégia A corresponde à estratégia de imunização de segunda ordem.

Estratégia B

$$A_0 = L_0 = 5.597.459,20 \quad (5.14)'$$

$$D(A) = D(L) = 8,921$$

$$C(A) = 200$$

Os montantes a investir em cada título, numa e noutra das estratégias, são:

Descrição	Quantidade A	Quantidade B
OT 5,375% Jun 2008	0	2.128.260
OT 3.95% Jul 2009	131.828	409.853
OT 5.85% Mai 2010	0	0
OT 5.15% Jun 2011	360.979	0
OT 5% Jun 2012	454.696	0
OT 5.45% Set 2013	1.127.232	0
OT 3.35% Out 2015	620.371	0
OT 4.35% Out 2017	699.830	0
OT 3.85% Abr 2021	670.668	0
OT 4.10% Abr 2037	1.691.398	3.294.837

Tabela 5.33 - Montantes a investir nas estratégias A e B

Como se vê pelo quadro, se os choques forem paralelos, não há dúvidas que a estratégia B terá uma performance superior à da estratégia A. Tendo em atenção a EPTJ inicial da Tabela 5.22, variações em β_0 representam os choques paralelos, obtendo-se então os seguintes resultados:

C=138,67 Estratégia A

ΔB_0	Var. Activo	Var. Passivo	Var. absl.	Var. rel.
+0,01	-1.243.059,70 €	-1.229.939,22 €	-13.120,48 €	-0,23%
+0,02	-1.553.507,62 €	-1.538.345,44 €	-15.162,18 €	-0,27%
+0,03	-1.827.625,65 €	-1.809.176,33 €	-18.449,32 €	-0,33%
+0,04	-2.071.442,21 €	-2.048.477,43 €	-22.964,78 €	-0,41%
-0,01	-480.620,62 €	-468.362,83 €	-12.257,79 €	-0,22%
-0,02	-6.541,36 €	6.202,95 €	-12.744,31 €	-0,23%
-0,03	549.511,67 €	562.493,32 €	-12.981,66 €	-0,23%
-0,04	1.208.117,84 €	1.220.061,27 €	-11.943,43 €	-0,21%

Tabela 5.34 - Impacto na carteira na estratégia A face a choques paralelos

Pode assim observar-se que na estratégia A, para todos os choques paralelos, a carteira sofreu uma desvalorização.

C=200 Estratégia B				
ΔB_0	Var. Activo	Var. Passivo	Var. absl.	Var. rel.
+0,01	-1.099.480,01 €	-1.229.939,22 €	130.459,21 €	2,33%
+0,02	-1.350.513,68 €	-1.538.345,44 €	187.831,76 €	3,36%
+0,03	-1.557.848,94 €	-1.809.176,33 €	251.327,38 €	4,49%
+0,04	-1.730.879,02 €	-2.048.477,43 €	317.598,41 €	5,67%
-0,01	-413.603,30 €	-468.362,83 €	54.759,53 €	0,98%
-0,02	58.173,66 €	6.202,95 €	51.970,71 €	0,93%
-0,03	650.304,11 €	562.493,32 €	87.810,79 €	1,57%
-0,04	1.398.916,72 €	1.220.061,27 €	178.855,45 €	3,20%

Tabela 5.35 - Impacto na carteira na estratégia B face a choques paralelos

Quanto à estratégia B, para todos os choques paralelos a carteira sofreu uma valorização.

Para os cenários ascendente e descendente verificam-se as seguintes variações:

Estratégia A	Var. Activo	Var. Passivo	Var. absl.	Var. rel.
Cen. asc.	-888.661,39 €	-876.427,87 €	-12.233,51 €	-0,22%
Cen. desc.	894.691,65 €	889.850,63 €	4.841,02 €	0,09%
Estratégia B	Var. Activo	Var. Passivo	Var. absl.	Var. rel.
Cen. asc.	-792.507,27 €	-876.427,87 €	83.920,61 €	1,50%
Cen. desc.	906.444,77 €	889.850,63 €	16.594,15 €	0,30%

Tabela 5.36 - Variações na carteira face aos choques dos cenários ascendente e descendente para as estratégias A e B

A convexidade mais elevada da estratégia B aparenta ter um efeito positivo no processo de imunização.

Compare-se agora as variações líquidas da carteira entre as duas estratégias quando estas são confrontadas com 498 observações para a EPTJ (Svensson) estimada pelo BCE entre 29-12-2006 a 09-12-2008, ou seja, supõe-se que estas observações correspondem a 498 choques instantâneos.

Variações líquidas da carteira:

Estratégia A							
Mínimo	Data	B_0	B_1	B_2	B_3	α	λ
-14.085,83 €	19-06-2008	4,815%	-0,925%	4,587%	-3,552%	1,234	1,477
Máximo	Data	B_0	B_1	B_2	B_3	α	λ
22.897,21 €	04-12-2008	0,010%	2,214%	8,863%	-1,731%	11,757	0,558
Média	Desv. Padrão						
-2.704,55 €	8.078,29 €						

Tabela 5.37 - Nível de imunização da estratégia A face a 498 observações da EPTJ do BCE

Estratégia B							
Mínimo	Data	B_0	B_1	B_2	B_3	α	λ
-141.279,03 €	17-03-2008	5,303%	-1,307%	-1,363%	-3,438%	2,347	2,252
Máximo	Data	B_0	B_1	B_2	B_3	α	λ
114.331,85 €	04-12-2008	0,010%	2,214%	8,863%	-1,731%	11,757	0,558
Média	Desv. Padrão						
-38.713,55 €	40.849,26 €						

Tabela 5.38 - Nível de imunização da estratégia B face a 498 observações da EPTJ do BCE

Ou seja, quando confrontada com as várias EPTJ, a estratégia A apresentada um grau de imunização bastante superior ao da estratégia B, o que mostra que as condições de Redington ou a estratégia de Barbell-Bullet não são isentas de risco.

5.7.3.2 Exemplo 6 revisto

Retome-se agora o Exemplo 6, em que se investe em 3.642.119,69 unidades de OT 4,10% Abr 2037. Para os cenários do QIS4 obteve-se uma valorização de cerca de 71 mil euros tanto para o cenário ascendente como para o cenário descendente. Mostrou-se que adicionado um cenário hipotético de uma curva bastante inclinada a carteira desvalorizava cerca de 400 mil euros. Compare-se agora a estratégia com a amostra em questão.

Exemplo 6						
Mínimo	Data	B ₀	B ₁	B ₂	B ₃	α
-161.117,13 €	17-11-2008	5,286%	-2,889%	-0,691%	-5,017%	0,93
Máximo	Data	B ₀	B ₁	B ₂	B ₃	α
154.320,36 €	04-12-2008	0,010%	2,214%	8,863%	-1,731%	11,7!
Média	Desv. Padrão					
-35.798,10 €	49.479,71 €					

Tabela 5.39 - Nível de imunização da estratégia do Exemplo 6 face a 498 observações da EPTJ do BCE

Note-se que a EPTJ sofre frequentemente choques nas taxas de curto prazo enquanto as de longo prazo se mantêm relativamente inalteradas. Assim, verifica-se uma valorização do passivo que não é acompanhada pelo título.

5.7.3.3 Imunização de terceira ordem

Por fim, analisa-se a estratégia de imunização de terceira ordem, em que o valor do activo é igual ao valor do passivo. Veremos que, nesta situação, o desvio padrão dos diversos cenários é o menor dos casos analisados.

Resolvendo o problema

$$\text{Min} \sum_{i=1}^{10} p_i^2$$

$$s.a: \quad A_0 = L_0 = 5.597.459,20; \quad D(A) = D(L) = 8,921;$$

$$C(A) = D_A(2) = C(L) = D_L(2) = 138,67; \quad D_A(3) = D_L(3) = 2.684,$$

socorrendo-nos mais uma vez método dos multiplicadores de Lagrange, obtém-se a seguinte estratégia de investimento

Soma quadrado		
0,1657632		
Descrição	proporção	Quantidades
OT 5,375% Jun 2008	7,76%	421.281
OT 3.95% Jul 2009	4,64%	257.268
OT 5.85% Mai 2010	3,39%	178.036
OT 5.15% Jun 2011	2,75%	146.901
OT 5% Jun 2012	3,16%	169.383
OT 5.45% Set 2013	4,68%	247.832
OT 3.35% Out 2015	9,53%	577.621
OT 4.35% Out 2017	14,86%	848.495
OT 3.85% Abr 2021	25,41%	1.524.236
OT 4.10% Abr 2037	23,82%	1.469.669

Tabela 5.40 - Proporções/quantidades a investir em cada OT na imunização de 3ª ordem

M=3							
Mínimo	Data	B ₀	B ₁	B ₂	B ₃	α	λ
-9.778,89 €	31-10-2008	4,969%	-4,959%	6,301%	-8,415%	0,250	0,889
Máximo	Data	B ₀	B ₁	B ₂	B ₃	α	λ
-10,62 €	05-06-2008	5,252%	-1,618%	3,996%	-4,631%	1,119	2,140
Média	Desv. Padrão						
-2.933,80 €	1.891,87 €						

Tabela 5.41 - Nível de imunização da estratégia de terceira ordem face a 498 observações da EPTJ do BCE

Observa-se que a carteira sofre desvalorizações pouco significativas.

Conclusão

No último capítulo procurou aplicar-se alguns dos conceitos expostos nos capítulos anteriores tendo em conta o exercício do Estudo de Impacto Quantitativo 4 (QIS4) para o risco de taxa de juro.

Concluiu-se que não só a análise de dois cenários relativamente simétricos e paralelos é insuficiente para se captar eficazmente a exposição à EPTJ de uma dada carteira, como as estratégias que mais beneficiam com os choques propostos são, ao mesmo tempo, aquelas que maiores perdas originam quando comparadas com outras estruturas (hipotéticas e reais).

A explicação para este facto advém da natureza dos choques e da própria carteira (activos e passivos) em si. Enquanto no primeiro capítulo se explorou os benefícios da convexidade num contexto de choques paralelos, no segundo, analisou-se em parte, os possíveis efeitos de uma convexidade elevada quando as deslocções nas taxas são assimétricas. Assim, observou-se que nestas situações uma convexidade elevada poderá ter um efeito prejudicial na carteira.

No primeiro capítulo mostrou-se ainda que aumentar a convexidade de um conjunto de activos de rendimento fixo é equivalente a aumentar a dispersão dos seus cash flows, o que implica concentrar o investimento em maturidades de curto e de longo prazo. Em tais condições, o cenário mais gravoso será aquele em que se verifica uma inclinação na EPTJ com uma descida das taxas de curto - médio prazo e uma subida das taxas de longo prazo, tendo em conta um passivo da mesma natureza do apresentado na Tabela 5.2. Este facto é potenciado quando o valor dos activos a englobar no exercício é inferior ao valor do passivo.

Assim, propõe-se que para além dos dois cenários que englobam o exercício do QIS4, se incluam pelo menos mais três assimétricos (de acordo com um VaR a 99,5% a um ano). Propõe-se também que seja considerada uma forma funcional para as estruturas de cada cenário, de modo a que não haja necessidade de assumir um processo de interpolação, embora a utilização da estrutura inicial proposta seja facultativa. Deste modo, pretende captar-se de uma forma mais abrangente a exposição ao risco de taxa de juro de uma determinada carteira.

Para o tipo de choques em análise, sobretudo os correspondentes a cenários extremos e assimétricos, concluímos que a estratégia de imunização mais eficaz é a imunização de terceira ordem, que por vezes, dependendo da carteira, pode obrigar a vendas a descoberto. Para imunizações de ordens superiores, a estratégia de investimento pode obrigar a tomadas de posição radicais, o que não só poderá ir contra a política de investimentos da entidade em questão, como põe em causa o próprio processo de imunização.

Note-se ainda que, no exercício de risco de taxa de juro do QIS4, falta uma *guidance* específica relativamente aos fundos de investimento. Nas TS.IX.A.4, vem

“Risk exposures of collective investment schemes should be allocated to sub-modules on a look-through basis if possible and on a best effort basis otherwise”.

Assim, se houver um fundo de investimento maioritariamente composto por obrigações, de modo que o exercício seja resolvido com rigor, é necessário que haja informação título a título.

Por fim, mesmo aplicando uma estratégia de imunização sólida, é importante ter-se em conta que nunca é possível eliminar completamente a exposição relativamente à EPTJ.

Como comentário final, expressa-se a importância das companhias de seguros com linhas de negócio a longo prazo, adoptarem uma política de gestão do risco da taxa de juro. Caso não o façam, mesmo que as estimativas do passivo sejam 100% precisas e os investimentos incidam apenas sobre activos de rendimento fixo, sem risco de crédito, poderão ainda assim incorrer em perdas significativas, face a variações na estrutura de prazos das taxas de juro. Foi isso que se procurou mostrar.

Como proposta para trabalhos futuros, é imperioso apontar a simulação estocástica da EPTJ, fixando-se, por exemplo, um horizonte temporal de um trimestre, isto é, $dt = 0,25$ (e, como é evidente, uma parametrização adequada, pressupondo que durante um trimestre não haveria possibilidade de se alterar a composição da carteira). Após as várias simulações seria seleccionada a variação líquida (mais gravosa) do percentil 99,5%.

Em relação à escolha do modelo, este teria de ser um modelo multi - factor. Caso contrário, cada cenário só produzirá choques na mesma direcção. No entanto, o número de simulações a efectuar implicaria um esforço adicional das seguradoras de menor dimensão, que não dispõem de um software adequado. Mas essa é outra questão.

Anexo 1

Justificação do grau do polinómio do *spline* de interpolação

Seja $f(t)$ um *spline* cúbico de interpolação e seja $h(t)$ uma função contínua que intercepta todos os *nós* e admite a existência da primeira e segunda derivada no domínio $[t_0, t_K]$. Então,

$$\int_{t_0}^{t_K} [f''(t)]^2 dt \leq \int_{t_0}^{t_K} [h''(t)]^2 dt, \quad (\text{A1.1})$$

sujeito a

$$f''(t_0) = 0 \text{ e } f''(t_K) = 0 \text{ (spline natural)}, \quad (\text{A1.2})$$

$$\text{ou} \quad f'(t_0) = h'(t_0) \text{ e } f'(t_K) = h'(t_K) \text{ (clamped cubic spline)}. \quad (\text{A1.3})$$

Por outro lado, se $D(t) = h(t) - f(t)$, vem

$$\int_{t_0}^{t_K} [h''(t)]^2 dt = \int_{t_0}^{t_K} [f''(t)]^2 dt + \int_{t_0}^{t_K} [D''(t)]^2 dt + 2 \int_{t_0}^{t_K} f''(t) D''(t) dt, \quad (\text{A1.4})$$

pelo que basta mostrar ser $\int_{t_0}^{t_K} f''(t) D''(t) dt = 0$.

Integrando por partes o integral do último termo de (A1.4), obtém-se

$$\int_{t_0}^{t_K} f''(t) D''(t) dt = f''(t_K) D'(t_K) - f''(t_0) D'(t_0) - \int_{t_0}^{t_K} f'''(t) D'(t) dt. \quad (\text{A1.5})$$

Se $f(t)$ for um *spline* cúbico natural, então $f''(t_0) = 0$ e $f''(t_K) = 0$. Se $f(t)$ for um *clamped cubic spline* em que as inclinações das extremidades são fixadas de modo a satisfazer a condição imposta em (A1.3), então $D'(t_0) = 0$ e $D'(t_K) = 0$.

O último termo de (A1.5) pode ser escrito como $\sum_{j=0}^{K-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} f'''(t) D'(t) dt$. Integrando cada termo do somatório por partes, resulta em

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} f'''(t) D'(t) dt = f'''(t) D(t_{j+1}) - f'''(t) D(t_j) - \int_{t_j}^{t_{j+1}} f^{(4)}(t) D(t) dt. \quad (\text{A1.6})$$

Como $h(t)$ passa por todos os *nós*, então $D(t_j) = h(t_j) - f(t_j) = 0$, $j=0,1,\dots,K$. Logo, os primeiros dois termos de (A1.6) são iguais a zero. O último termo de (A1.6) também é zero, pois $f(t)$ em cada segmento é um polinómio de terceiro grau, consequentemente

$$f^{(4)}(t) = 0, \quad \forall t. \quad \text{Ou seja, } \int_{t_0}^{t_K} f'''(t) D'(t) dt = 0.$$

Anexo 2

Parâmetros dos *splines*

Para os *spline* de regressão de McCulloch, considerou-se que as taxas propostas no QIS4 para cada cenário representam as rendibilidades de obrigações de cupão zero, logo o vector \mathbf{y} e a matriz \mathbf{X} (veja-se o ponto 4.2.3) definem-se da seguinte forma:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} (1+i_0)^{-0} - 1 \\ (1+i_{0,25})^{-0,25} - 1 \\ \vdots \\ (1+i_{75})^{-75} - 1 \end{bmatrix}_{(77 \times 1)}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} g_1(t_1) & g_2(t_1) & \dots & g_9(t_1) \\ g_1(t_2) & g_2(t_2) & \dots & g_9(t_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_1(t_{75}) & g_2(t_{75}) & \dots & g_9(t_{75}) \end{bmatrix}_{(77 \times 9)}$$

em que a função $g_i(t)$ é dada pela expressão (4.30). Deste modo, vem

i	T _i	Parâmetros	Cenários		
			inicial	ascendente	descendente
		a1	0,001291	0,009279	-0,001855
1	0,00	a2	0,001135	0,001408	0,000476
2	7,71	a3	0,001305	0,001690	0,000946
3	18,43	a4	0,000524	0,000399	0,000520
4	29,14	a5	0,000316	0,000371	0,000230
5	39,86	a6	0,000140	0,000061	0,000172
6	50,57	a7	0,000114	0,000117	0,000100
7	61,29	a8	0,000037	-0,000058	0,000108
8	75,00	a9	-0,043188	-0,077773	-0,021975

Os nós dos *splines* foram obtidos pelo método proposto no ponto (4.3.2).

Clamped cubic spline do cenário inicial

t_j	a_j	b_j	c_j	d_j
0	3,916E-02	8,600E-02	-3,280E-01	4,277E-01
0,25	4,684E-02	2,172E-03	-7,265E-03	9,110E-03
0,5	4,707E-02	2,479E-04	-4,320E-04	-1,018E-03
1	4,696E-02	-9,476E-04	-1,959E-03	1,209E-03
2	4,526E-02	-1,238E-03	1,668E-03	-5,950E-04
3	4,510E-02	3,130E-04	-1,169E-04	3,665E-05
4	4,533E-02	1,892E-04	-6,931E-06	1,685E-05
5	4,553E-02	2,259E-04	4,363E-05	-1,772E-06
6	4,580E-02	3,078E-04	3,831E-05	-6,283E-06
7	4,614E-02	3,656E-04	1,946E-05	6,797E-06
8	4,653E-02	4,249E-04	3,985E-05	-1,806E-05
9	4,698E-02	4,504E-04	-1,434E-05	5,994E-06
10	4,742E-02	4,397E-04	3,639E-06	-1,809E-05
11	4,784E-02	3,927E-04	-5,064E-05	1,244E-05
12	4,820E-02	3,287E-04	-1,331E-05	-4,394E-06
13	4,851E-02	2,889E-04	-2,649E-05	4,230E-06
14	4,877E-02	2,487E-04	-1,380E-05	-3,667E-06
15	4,901E-02	2,100E-04	-2,480E-05	5,374E-06
16	4,920E-02	1,766E-04	-8,682E-06	3,418E-07
17	4,936E-02	1,602E-04	-7,657E-06	-3,013E-06
18	4,951E-02	1,359E-04	-1,670E-05	1,465E-05
19	4,965E-02	1,464E-04	2,727E-05	-5,325E-05
20	4,977E-02	4,123E-05	-1,325E-04	5,654E-05
21	4,973E-02	-5,410E-05	3,715E-05	-1,460E-05
22	4,970E-02	-2,360E-05	-6,644E-06	1,435E-06
23	4,967E-02	-3,258E-05	-2,339E-06	8,514E-06
24	4,965E-02	-1,172E-05	2,320E-05	-3,578E-05
25	4,962E-02	-7,265E-05	-8,414E-05	3,735E-05
26	4,950E-02	-1,289E-04	2,791E-05	-9,617E-06
27	4,939E-02	-1,019E-04	-9,381E-07	1,679E-07
28	4,929E-02	-1,033E-04	-4,344E-07	8,126E-06
29	4,919E-02	-7,976E-05	2,394E-05	-3,338E-05
30	4,911E-02	-1,320E-04	-7,620E-05	3,455E-05
31	4,893E-02	-1,808E-04	2,745E-05	-9,474E-06
32	4,877E-02	-1,543E-04	-9,682E-07	2,352E-06
33	4,862E-02	-1,492E-04	6,087E-06	-8,074E-07
34	4,847E-02	-1,394E-04	3,665E-06	1,036E-07
35	4,834E-02	-1,318E-04	3,975E-06	-2,950E-07
36	4,821E-02	-1,247E-04	3,090E-06	4,628E-07
37	4,809E-02	-1,171E-04	4,479E-06	-2,105E-06
38	4,797E-02	-1,145E-04	-1,837E-06	7,466E-06
39	4,786E-02	-9,577E-05	2,056E-05	-2,820E-05

t_j	a_j	b_j	c_j	d_j
40	4,776E-02	-1,393E-04	-6,404E-05	2,885E-05
41	4,759E-02	-1,808E-04	2,252E-05	-7,857E-06
42	4,742E-02	-1,593E-04	-1,049E-06	1,991E-06
43	4,726E-02	-1,554E-04	4,925E-06	-6,375E-07
44	4,711E-02	-1,475E-04	3,012E-06	7,596E-08
45	4,697E-02	-1,412E-04	3,240E-06	-1,071E-07
46	4,683E-02	-1,351E-04	2,919E-06	-5,075E-08
47	4,670E-02	-1,294E-04	2,766E-06	-5,932E-08
48	4,657E-02	-1,240E-04	2,589E-06	-5,115E-08
49	4,645E-02	-1,190E-04	2,435E-06	-4,805E-08
50	4,633E-02	-1,143E-04	2,291E-06	-4,410E-08
51	4,622E-02	-1,098E-04	2,159E-06	-4,083E-08
52	4,611E-02	-1,056E-04	2,036E-06	-3,778E-08
53	4,601E-02	-1,017E-04	1,923E-06	-3,503E-08
54	4,591E-02	-9,794E-05	1,818E-06	-3,252E-08
55	4,581E-02	-9,441E-05	1,720E-06	-3,024E-08
56	4,572E-02	-9,106E-05	1,629E-06	-2,815E-08
57	4,563E-02	-8,788E-05	1,545E-06	-2,624E-08
58	4,554E-02	-8,487E-05	1,466E-06	-2,448E-08
59	4,546E-02	-8,201E-05	1,393E-06	-2,288E-08
60	4,538E-02	-7,929E-05	1,324E-06	-2,140E-08
61	4,530E-02	-7,671E-05	1,260E-06	-2,004E-08
62	4,523E-02	-7,425E-05	1,200E-06	-1,878E-08
63	4,515E-02	-7,191E-05	1,144E-06	-1,762E-08
64	4,508E-02	-6,967E-05	1,091E-06	-1,656E-08
65	4,501E-02	-6,754E-05	1,041E-06	-1,556E-08
66	4,495E-02	-6,551E-05	9,943E-07	-1,466E-08
67	4,488E-02	-6,356E-05	9,504E-07	-1,375E-08
68	4,482E-02	-6,170E-05	9,091E-07	-1,319E-08
69	4,476E-02	-5,992E-05	8,695E-07	-1,158E-08
70	4,470E-02	-5,822E-05	8,348E-07	-1,418E-08
71	4,464E-02	-5,659E-05	7,923E-07	-1,287E-09
72	4,459E-02	-5,501E-05	7,884E-07	-4,644E-08
73	4,453E-02	-5,357E-05	6,491E-07	1,248E-07
74	4,448E-02	-7,759E-05	1,024E-06	2,518E-05

Clamped cubic spline do cenário ascendente

t_j	a_j	b_j	c_j	d_j
0	7,597E-02	1,600E-01	-5,887E-01	7,483E-01
0,25	9,087E-02	5,961E-03	-2,748E-02	4,324E-02
0,5	9,132E-02	3,318E-04	4,958E-03	-1,297E-02
1	9,110E-02	-4,438E-03	-1,450E-02	7,949E-03
2	8,011E-02	-9,588E-03	9,349E-03	-3,662E-03
3	7,621E-02	-1,874E-03	-1,636E-03	7,303E-04
4	7,343E-02	-2,955E-03	5,550E-04	-9,245E-06
5	7,103E-02	-1,873E-03	5,273E-04	-6,885E-05
6	6,961E-02	-1,025E-03	3,207E-04	-1,637E-04
7	6,874E-02	-8,741E-04	-1,703E-04	2,324E-04
8	6,793E-02	-5,175E-04	5,269E-04	-2,967E-04
9	6,764E-02	-3,539E-04	-3,632E-04	4,054E-04
10	6,733E-02	1,357E-04	8,528E-04	-3,846E-04
11	6,794E-02	6,874E-04	-3,011E-04	1,171E-04
12	6,844E-02	4,364E-04	5,011E-05	-4,487E-05
13	6,888E-02	4,021E-04	-8,450E-05	6,114E-05
14	6,926E-02	4,165E-04	9,892E-05	-1,871E-04
15	6,959E-02	5,297E-05	-4,624E-04	1,881E-04
16	6,937E-02	-3,074E-04	1,020E-04	-5,106E-05
17	6,911E-02	-2,566E-04	-5,117E-05	2,197E-05
18	6,882E-02	-2,930E-04	1,473E-05	-3,218E-05
19	6,851E-02	-3,601E-04	-8,181E-05	1,104E-04
20	6,818E-02	-1,924E-04	2,495E-04	-1,047E-04
21	6,814E-02	-7,438E-06	-6,460E-05	2,882E-05
22	6,809E-02	-5,020E-05	2,184E-05	-1,111E-05
23	6,805E-02	-3,985E-05	-1,150E-05	1,517E-05
24	6,802E-02	-1,733E-05	3,401E-05	-4,996E-05
25	6,798E-02	-9,918E-05	-1,159E-04	5,142E-05
26	6,782E-02	-1,766E-04	3,840E-05	-1,324E-05
27	6,767E-02	-1,396E-04	-1,328E-06	2,481E-07
28	6,753E-02	-1,415E-04	-5,837E-07	1,113E-05
29	6,740E-02	-1,093E-04	3,280E-05	-4,573E-05
30	6,727E-02	-1,809E-04	-1,044E-04	4,734E-05
31	6,704E-02	-2,477E-04	3,761E-05	-1,298E-05
32	6,681E-02	-2,114E-04	-1,326E-06	3,222E-06
33	6,660E-02	-2,044E-04	8,339E-06	-1,106E-06
34	6,641E-02	-1,910E-04	5,020E-06	1,419E-07
35	6,622E-02	-1,805E-04	5,446E-06	-4,041E-07
36	6,605E-02	-1,708E-04	4,234E-06	6,341E-07
37	6,588E-02	-1,605E-04	6,136E-06	-2,884E-06
38	6,572E-02	-1,569E-04	-2,517E-06	1,023E-05
39	6,557E-02	-1,312E-04	2,817E-05	-3,863E-05

t_j	a_j	b_j	c_j	d_j
40	6,572E-02	-1,569E-04	-2,517E-06	1,023E-05
41	6,557E-02	-1,312E-04	2,817E-05	-3,863E-05
42	6,543E-02	-1,908E-04	-8,774E-05	3,953E-05
43	6,519E-02	-2,477E-04	3,086E-05	-1,076E-05
44	6,496E-02	-2,182E-04	-1,437E-06	2,728E-06
45	6,475E-02	-2,129E-04	6,747E-06	-8,734E-07
46	6,454E-02	-2,021E-04	4,127E-06	1,041E-07
47	6,434E-02	-1,935E-04	4,439E-06	-1,467E-07
48	6,415E-02	-1,851E-04	3,999E-06	-6,953E-08
49	6,397E-02	-1,773E-04	3,790E-06	-8,126E-08
50	6,380E-02	-1,699E-04	3,546E-06	-7,008E-08
51	6,363E-02	-1,630E-04	3,336E-06	-6,582E-08
52	6,347E-02	-1,566E-04	3,139E-06	-6,041E-08
53	6,332E-02	-1,505E-04	2,957E-06	-5,593E-08
54	6,317E-02	-1,447E-04	2,790E-06	-5,176E-08
55	6,303E-02	-1,393E-04	2,634E-06	-4,799E-08
56	6,289E-02	-1,342E-04	2,490E-06	-4,456E-08
57	6,276E-02	-1,293E-04	2,357E-06	-4,143E-08
58	6,263E-02	-1,247E-04	2,232E-06	-3,856E-08
59	6,251E-02	-1,204E-04	2,117E-06	-3,594E-08
60	6,239E-02	-1,163E-04	2,009E-06	-3,354E-08
61	6,228E-02	-1,124E-04	1,908E-06	-3,134E-08
62	6,217E-02	-1,086E-04	1,814E-06	-2,931E-08
63	6,206E-02	-1,051E-04	1,726E-06	-2,745E-08
64	6,196E-02	-1,017E-04	1,644E-06	-2,573E-08
65	6,186E-02	-9,851E-05	1,567E-06	-2,415E-08
66	6,176E-02	-9,545E-05	1,494E-06	-2,268E-08
67	6,167E-02	-9,253E-05	1,426E-06	-2,132E-08
68	6,158E-02	-8,974E-05	1,362E-06	-2,009E-08
69	6,149E-02	-8,708E-05	1,302E-06	-1,883E-08
70	6,140E-02	-8,453E-05	1,245E-06	-1,807E-08
71	6,132E-02	-8,209E-05	1,191E-06	-1,586E-08
72	6,124E-02	-7,976E-05	1,144E-06	-1,943E-08
73	6,116E-02	-7,753E-05	1,085E-06	-1,764E-09
74	6,108E-02	-7,536E-05	1,080E-06	-6,362E-08

Natural cubic spline do cenário descendente

t_j	a_j	b_j	c_j	d_j
0	1,919E-02	4,000E-02	-1,461E-01	1,852E-01
0,25	2,295E-02	1,679E-03	-7,201E-03	9,190E-03
0,5	2,306E-02	-1,980E-04	-3,081E-04	9,720E-04
1	2,301E-02	2,228E-04	1,150E-03	-3,940E-04
2	2,399E-02	1,341E-03	-3,220E-05	-4,295E-05
3	2,525E-02	1,147E-03	-1,611E-04	5,074E-05
4	2,629E-02	9,774E-04	-8,843E-06	5,754E-05
5	2,732E-02	1,132E-03	1,638E-04	-2,195E-04
6	2,839E-02	8,013E-04	-4,947E-04	3,655E-04
7	2,907E-02	9,083E-04	6,017E-04	-3,325E-04
8	3,024E-02	1,114E-03	-3,959E-04	4,190E-05
9	3,100E-02	4,480E-04	-2,702E-04	1,139E-04
10	3,130E-02	2,494E-04	7,153E-05	-4,025E-05
11	3,158E-02	2,717E-04	-4,922E-05	1,151E-05
12	3,181E-02	2,078E-04	-1,470E-05	1,222E-05
13	3,202E-02	2,150E-04	2,198E-05	-6,100E-05
14	3,219E-02	7,598E-05	-1,610E-04	2,376E-04
15	3,234E-02	4,668E-04	5,519E-04	-4,009E-04
16	3,296E-02	3,678E-04	-6,509E-04	3,959E-04
17	3,307E-02	2,535E-04	5,366E-04	-1,948E-04
18	3,367E-02	7,424E-04	-4,767E-05	-1,073E-04
19	3,426E-02	3,252E-04	-3,695E-04	1,274E-04
20	3,434E-02	-3,163E-05	1,265E-05	-4,965E-06
21	3,432E-02	-2,123E-05	-2,250E-06	1,712E-06
22	3,429E-02	-2,060E-05	2,887E-06	-2,167E-06
23	3,427E-02	-2,132E-05	-3,616E-06	6,721E-06
24	3,426E-02	-8,394E-06	1,655E-05	-2,491E-05
25	3,424E-02	-5,004E-05	-5,820E-05	2,583E-05
26	3,416E-02	-8,894E-05	1,930E-05	-6,652E-06
27	3,408E-02	-7,030E-05	-6,576E-07	1,202E-07
28	3,401E-02	-7,126E-05	-2,970E-07	5,606E-06
29	3,394E-02	-5,503E-05	1,652E-05	-2,303E-05
30	3,388E-02	-9,109E-05	-5,258E-05	2,384E-05
31	3,376E-02	-1,247E-04	1,894E-05	-6,537E-06
32	3,365E-02	-1,065E-04	-6,681E-07	1,623E-06
33	3,355E-02	-1,029E-04	4,200E-06	-5,571E-07
34	3,345E-02	-9,620E-05	2,529E-06	7,146E-08
35	3,335E-02	-9,092E-05	2,743E-06	-2,036E-07
36	3,326E-02	-8,605E-05	2,132E-06	3,194E-07
37	3,318E-02	-8,083E-05	3,090E-06	-1,453E-06
38	3,310E-02	-7,900E-05	-1,267E-06	5,151E-06
39	3,303E-02	-6,608E-05	1,419E-05	-1,946E-05

t_j	a_j	b_j	c_j	d_j
40	3,295E-02	-9,609E-05	-4,419E-05	1,991E-05
41	3,283E-02	-1,247E-04	1,554E-05	-5,422E-06
42	3,272E-02	-1,099E-04	-7,238E-07	1,374E-06
43	3,261E-02	-1,072E-04	3,398E-06	-4,399E-07
44	3,251E-02	-1,018E-04	2,078E-06	5,242E-08
45	3,241E-02	-9,745E-05	2,236E-06	-7,388E-08
46	3,231E-02	-9,320E-05	2,014E-06	-3,502E-08
47	3,222E-02	-8,928E-05	1,909E-06	-4,093E-08
48	3,213E-02	-8,559E-05	1,786E-06	-3,529E-08
49	3,205E-02	-8,212E-05	1,680E-06	-3,315E-08
50	3,197E-02	-7,886E-05	1,581E-06	-3,043E-08
51	3,189E-02	-7,579E-05	1,489E-06	-2,817E-08
52	3,182E-02	-7,289E-05	1,405E-06	-2,607E-08
53	3,174E-02	-7,016E-05	1,327E-06	-2,417E-08
54	3,168E-02	-6,758E-05	1,254E-06	-2,244E-08
55	3,161E-02	-6,514E-05	1,187E-06	-2,086E-08
56	3,155E-02	-6,283E-05	1,124E-06	-1,942E-08
57	3,148E-02	-6,064E-05	1,066E-06	-1,810E-08
58	3,142E-02	-5,856E-05	1,012E-06	-1,689E-08
59	3,137E-02	-5,659E-05	9,611E-07	-1,578E-08
60	3,131E-02	-5,471E-05	9,137E-07	-1,476E-08
61	3,126E-02	-5,293E-05	8,694E-07	-1,383E-08
62	3,121E-02	-5,123E-05	8,279E-07	-1,296E-08
63	3,115E-02	-4,962E-05	7,891E-07	-1,216E-08
64	3,111E-02	-4,807E-05	7,526E-07	-1,142E-08
65	3,106E-02	-4,660E-05	7,183E-07	-1,074E-08
66	3,101E-02	-4,520E-05	6,861E-07	-1,012E-08
67	3,097E-02	-4,386E-05	6,557E-07	-9,486E-09
68	3,093E-02	-4,257E-05	6,273E-07	-9,103E-09
69	3,088E-02	-4,135E-05	6,000E-07	-7,990E-09
70	3,084E-02	-4,017E-05	5,760E-07	-9,785E-09
71	3,080E-02	-3,905E-05	5,467E-07	-8,882E-10
72	3,076E-02	-3,796E-05	5,440E-07	-3,204E-08
73	3,073E-02	-3,697E-05	4,479E-07	8,614E-08
74	3,069E-02	-5,354E-05	7,063E-07	1,738E-05

Anexo 3

Vectores de direcção para os cenários ascendente e descendente

N _{asc.} = 18,35				N _{desc.} = 13,88			
t	N _{asc.}	t	N _{asc.}	t	N _{desc.}	t	N _{desc.}
0	3,681	37	1,779	0	-1,997	37	-1,491
0,25	4,403	38	1,775	0,25	-2,389	38	-1,487
0,5	4,425	39	1,771	0,5	-2,401	39	-1,484
1	4,414	40	1,767	1	-2,395	40	-1,481
2	3,485	41	1,761	2	-2,127	41	-1,475
3	3,112	42	1,755	3	-1,984	42	-1,470
4	2,810	43	1,749	4	-1,904	43	-1,465
5	2,550	44	1,743	5	-1,821	44	-1,460
6	2,381	45	1,738	6	-1,740	45	-1,456
7	2,261	46	1,733	7	-1,707	46	-1,452
8	2,140	47	1,728	8	-1,629	47	-1,448
9	2,067	48	1,723	9	-1,597	48	-1,444
10	1,992	49	1,719	10	-1,612	49	-1,440
11	2,009	50	1,714	11	-1,627	50	-1,436
12	2,024	51	1,710	12	-1,639	51	-1,433
13	2,037	52	1,706	13	-1,649	52	-1,429
14	2,049	53	1,702	14	-1,658	53	-1,426
15	2,058	54	1,699	15	-1,666	54	-1,423
16	2,017	55	1,695	16	-1,623	55	-1,420
17	1,975	56	1,692	17	-1,629	56	-1,417
18	1,931	57	1,688	18	-1,584	57	-1,415
19	1,887	58	1,685	19	-1,539	58	-1,412
20	1,841	59	1,682	20	-1,543	59	-1,409
21	1,840	60	1,679	21	-1,542	60	-1,407
22	1,839	61	1,676	22	-1,541	61	-1,404
23	1,838	62	1,673	23	-1,540	62	-1,402
24	1,837	63	1,671	24	-1,539	63	-1,400
25	1,836	64	1,668	25	-1,538	64	-1,398
26	1,832	65	1,665	26	-1,535	65	-1,395
27	1,828	66	1,663	27	-1,531	66	-1,393
28	1,824	67	1,661	28	-1,528	67	-1,391
29	1,820	68	1,658	29	-1,525	68	-1,389
30	1,817	69	1,656	30	-1,522	69	-1,388
31	1,810	70	1,654	31	-1,517	70	-1,386
32	1,804	71	1,652	32	-1,512	71	-1,384
33	1,799	72	1,650	33	-1,507	72	-1,382
34	1,793	73	1,648	34	-1,503	73	-1,380
35	1,788	74	1,646	35	-1,498	74	-1,379
36	1,784	75	1,644	36	-1,494	75	-1,377

Anexo 4

Vectores colineares unitários das estratégias 2, 3 e 4

	N ₀ =1		
tempo	Estratégia 2	estratégia 3	estratégia 4
0	0,000000	0,000000	0,000000
0,25	0,001773	0,001765	0,001820
0,5	-0,002076	0,008603	-0,007488
1	-0,003322	-0,003685	-0,004561
2	-0,005675	0,023795	-0,035197
3	0,027969	-0,035623	-0,047861
4	0,054464	0,055998	-0,058344
5	-0,075235	-0,073966	-0,065290
6	0,048231	-0,079730	-0,070222
7	-0,091212	-0,082691	-0,072636
8	0,182401	0,178105	0,140618
9	-0,100723	-0,091478	-0,079264
10	0,283615	0,229496	0,193562
11	-0,111101	-0,099362	-0,085138
12	-0,107253	-0,095673	-0,081552
13	0,400491	0,350217	0,397124
14	-0,117032	-0,103601	-0,091298
15	-0,110683	-0,097624	-0,085765
16	-0,105333	-0,092665	-0,081230
17	-0,098271	-0,086065	-0,075154
18	-0,092011	-0,080249	-0,069824
19	-0,086465	-0,075107	-0,065120
20	-0,079532	-0,068669	-0,059223
21	-0,072846	-0,062524	-0,053639
22	-0,066033	-0,056232	-0,047900
23	-0,058512	-0,049283	-0,041560
24	-0,051100	-0,042457	-0,035347
25	-0,044079	-0,036001	-0,029478
26	-0,037261	-0,029701	-0,023729
27	-0,031131	-0,024109	-0,018678
28	-0,025327	-0,018786	-0,013849
29	0,757612	0,816914	0,828769
30	-0,045504	-0,042063	-0,038395
31	-0,040181	-0,037143	-0,033903
32	-0,035221	-0,032558	-0,029718
33	-0,030636	-0,028320	-0,025850
34	-0,026431	-0,024433	-0,022302
35	-0,022612	-0,020902	-0,019079
36	-0,019173	-0,017724	-0,016178
37	-0,016106	-0,014888	-0,013589
38	-0,013395	-0,012382	-0,011302
39	-0,011030	-0,010196	-0,009307
40	-0,008983	-0,008304	-0,007580
41	-0,007253	-0,006704	-0,006119
42	-0,005773	-0,005336	-0,004871
43	-0,004522	-0,004180	-0,003816
44	-0,003474	-0,003211	-0,002931
45	-0,002607	-0,002410	-0,002200
46	-0,001898	-0,001754	-0,001601
47	-0,001322	-0,001222	-0,001115
48	-0,000862	-0,000796	-0,000727
49	-0,000499	-0,000461	-0,000421
50	-0,000216	-0,000200	-0,000182

Anexo 5 - Valor presente dos cash flows do título OT 4,10% Abr 2037 tendo em conta os cenários do QIS4 e steep

OT 4.10% Abr 2037			EPTJ				3.304.823,83 €	2.499.354,97 €	4.265.633,47 €	4.317.961,54 €
Data	CF	t	inicial	cresc.	decresc.	incl.	VP inicial	VP asc.	VP decresc.	VP incl.
15-04-2008	148.918,91 €	0,29	4,517%	8,716%	2,212%	1,378%	146.978,29 €	145.196,71 €	147.965,50 €	148.324,13 €
15-04-2009	149.326,91 €	1,29	4,456%	8,094%	2,323%	1,061%	140.982,01 €	134.517,91 €	144.916,97 €	147.295,78 €
15-04-2010	149.326,91 €	2,29	4,429%	7,630%	2,431%	0,876%	134.921,69 €	125.383,80 €	141.238,20 €	146.359,87 €
15-04-2011	149.326,91 €	3,29	4,426%	7,290%	2,535%	0,792%	129.089,86 €	117.480,89 €	137.376,11 €	145.485,64 €
16-04-2012	149.736,02 €	4,30	4,440%	7,043%	2,633%	0,784%	123.734,52 €	110.642,28 €	133.719,74 €	144.774,79 €
15-04-2013	148.917,79 €	5,29	4,466%	6,871%	2,724%	0,834%	117.568,96 €	103.512,83 €	128.920,49 €	142.488,99 €
15-04-2014	149.326,91 €	6,29	4,499%	6,753%	2,808%	0,925%	112.508,82 €	97.627,67 €	125.136,84 €	140.882,54 €
15-04-2015	149.326,91 €	7,29	4,536%	6,676%	2,885%	1,046%	107.268,20 €	91.769,59 €	120.991,95 €	138.357,07 €
15-04-2016	149.326,91 €	8,30	4,575%	6,628%	2,955%	1,188%	102.167,91 €	86.169,08 €	116.863,71 €	135.307,71 €
17-04-2017	150.142,90 €	9,30	4,614%	6,601%	3,018%	1,344%	97.753,89 €	81.254,69 €	113.398,48 €	132.494,29 €
16-04-2018	148.917,79 €	10,30	4,651%	6,590%	3,073%	1,507%	92.243,87 €	75.547,51 €	108.517,35 €	127.511,44 €
15-04-2019	148.917,79 €	11,30	4,685%	6,588%	3,122%	1,673%	87.719,92 €	70.757,96 €	104.661,21 €	123.277,06 €
15-04-2020	149.326,91 €	12,30	4,717%	6,592%	3,165%	1,840%	83.597,40 €	66.383,57 €	101.175,89 €	119.086,60 €
15-04-2021	149.326,91 €	13,30	4,745%	6,599%	3,203%	2,004%	79.447,54 €	62.088,50 €	97.538,56 €	114.385,27 €
15-04-2022	149.326,91 €	14,30	4,770%	6,608%	3,235%	2,165%	75.500,39 €	58.052,83 €	94.032,93 €	109.569,46 €
17-04-2023	150.145,14 €	15,30	4,791%	6,616%	3,262%	2,321%	72.127,64 €	54.549,42 €	91.141,32 €	105.248,71 €
15-04-2024	148.510,91 €	16,30	4,808%	6,623%	3,284%	2,471%	67.824,27 €	50.452,85 €	86.942,84 €	99.278,24 €
15-04-2025	149.326,91 €	17,30	4,822%	6,628%	3,303%	2,614%	64.841,55 €	47.436,47 €	84.323,44 €	95.007,95 €
15-04-2026	149.326,91 €	18,30	4,832%	6,631%	3,318%	2,750%	61.671,63 €	44.370,29 €	81.360,15 €	90.279,03 €
15-04-2027	149.326,91 €	19,30	4,839%	6,632%	3,330%	2,879%	58.679,40 €	41.519,30 €	78.527,30 €	85.667,18 €
17-04-2028	150.145,14 €	20,31	4,844%	6,630%	3,339%	3,002%	56.139,84 €	39.062,49 €	76.214,27 €	81.604,27 €
16-04-2029	148.917,79 €	21,31	4,846%	6,625%	3,345%	3,117%	53.034,05 €	36.298,27 €	73.020,98 €	76.648,00 €
15-04-2030	148.917,79 €	22,30	4,845%	6,619%	3,348%	3,226%	50.537,39 €	34.027,86 €	70.565,89 €	72.526,99 €
15-04-2031	149.326,91 €	23,30	4,843%	6,610%	3,350%	3,328%	48.308,22 €	32.001,42 €	68.401,71 €	68.759,49 €
15-04-2032	149.326,91 €	24,31	4,838%	6,599%	3,350%	3,424%	46.068,13 €	30.027,25 €	66.142,85 €	64.963,72 €
15-04-2033	149.326,91 €	25,31	4,832%	6,587%	3,349%	3,514%	43.959,73 €	28.197,96 €	63.989,99 €	61.360,69 €
17-04-2034	150.145,14 €	26,31	4,825%	6,573%	3,346%	3,599%	42.187,93 €	26.633,19 €	62.259,67 €	58.237,55 €
16-04-2035	148.917,79 €	27,31	4,816%	6,558%	3,341%	3,678%	39.972,32 €	24.841,87 €	59.792,32 €	54.535,34 €
15-04-2036	148.918,91 €	28,31	4,806%	6,541%	3,336%	3,753%	38.198,63 €	23.372,37 €	57.912,59 €	51.473,05 €
15-04-2037	3.791.446,60 €	29,31	4,796%	6,524%	3,330%	3,822%	929.789,83 €	560.178,15 €	1.428.584,23 €	1.236.770,69 €

Bibliografia

- Anderson, N., Sleath, J. (1999), New Estimates of the UK Real and Nominal Yield Curves, *Bank of England Quarterly Bulletin*, pp. 384-392
- Blitzer, D. M., Dash, S. (2004), Using Equity Duration In Pension Fund Asset Allocation, Standard & Poor's
- Blitzer, D. M., Dash, S., Murphy, P. (2008), Equity Duration - Updated Duration of the S&P 500, Standard & Poor's
- Bravo, Jorge M. V. (2001), Modelos de Risco de Taxa de Juro: Estratégias de Cobertura e Imunização, Tese de Mestrado, ISEG, Lisboa, Portugal
- Brigo, D., Mercurio, F. (2007), Interest Rate Models - Theory and Practice With Smile, Inflation and Credit Second Edition, Springer
- Choudhry, M. (2004), Analysing and Interpreting the Yield Curve, Wiley
- Choudhry, M. (2005), Fixed Income Securities and Derivatives Handbook: Analysis and Valuation, *Bloomberg Press*
- Cox, J. C., Ross, S. A., Rubinstein, M. (1979), Option Pricing: A Simplified Approach, *Journal of Financial Economics*, Vol. 7, No. 3, pp 229-263
- Fabozzi, F. J. (1999), Duration, Convexity, and Other Bond Risk Measures, Wiley
- Fisher, M., Nychka, D., Zervos, D. (1995), Fitting the term structure of interest rates with smoothing splines, Board of Governors of the Federal Reserve System, *Federal Reserve Board Working Paper 95-1*

- Fisher, L., Weil, R., Coping with the Risk of Interest-rate Fluctuations: Return to Bondholders from Naïve and Optimal Strategies, *The Journal of Business*, No. 4, pp 44
- Gordon, M. J. (1962), The Investment, Financing, and Valuation of the Corporation, Homewood - IL: Irwin
- Hawawini, G. A. (1982), Bond Duration and Immunization: Early Developments and Recent Contributions, Garland Publishing
- Hull, J. C. (2006), Options, Futures & Other Derivatives, Sixth Edition, Prentice Hall
- Kalotay, A. J., Williams, G. O., Fabozzi, F. J. (1993), A Model for Valuing Bonds and Embedded Options, *Financial Analysts Journal*, pp 35-46
- Klugman, S.A., Panjer, H. H., Willmot, G. E. (2004), Loss Models from data to decisions, Second Edition, Wiley-Interscience
- La Grandville, O. (2001), Bond Pricing and Portfolio Analysis: Protecting Investors in the Long Run, Cambridge Massachusetts, The MIT Press
- Leibowitz, M. L. (1986), Total Portfolio Duration: A New Perspective on Asset Allocation, *Financial Analysts Journal*, Vol. 51, No. 1, pp 139-148
- Leibowitz, M. L., Sorensen, E. H., Arnott, R. D., Nicholas, H. H. (1989), A Total Differential Approach to Equity Duration, *Financial Analysts Journal*, Vol 45, No. 5, pp 30-37
- Leibowitz, M. L., Kogelman, S. (1993), Resolving the Equity Duration Paradox, *Financial Analysts Journal*, Vol. 49, No. 1, pp 51-64

- Macaulay, F. R. (1938), Some Theoretical Problems Suggested by the Movements of Interest Rates, Bond Yields, and Stock Prices in the U.S. since 1856, National Bureau of Economic Research
- McCulloch, J. H. (1971), Measuring the Term Structure of Interest Rates, *Journal of Business*, Vol. 44, No. 1, pp 19-31
- McCulloch, J. H. (1975), The Tax Adjusted Yield Curve, *Journal of Business*, Vol. 30, No. 3, pp 811-830
- Nawalkha, S. K., Chambers, D. R. (1996), An Improved Immunization Strategy: The M-Absolute, *Financial Analysts Journal*, Vol. 52, No. 5, pp 69-76
- Nawalkha, S. K., Soto, G. M., Beliaeva (2005), Interest Rate Risk Modeling, Wiley
- Nawalkha, S. K., Soto, G. M., Beliaeva (2007), Dynamic Term Structure Modeling , Wiley
- Nelson, C. R., Siegel, A. F. (1987), Parsimonious Modeling of Yield Curves, *The Journal of Business*, Vol. 60, No. 4, pp 473-489
- Reitano, R. R. (1991), Multivariate Duration Analysis, *Transactions of Society of Actuaries*, Vol. 43, pp 335-392
- Reitano, R. R. (1992), Nonparallel Yield Curve Shifts and Convexity, *Transactions of Society of Actuaries*, Vol. 44, pp 479-494
- Redington, F. M. (1952), Review of the Principle of Life Office Valuations, *Journal of the Institute of Actuaries*, No. 18, pp 286-340
- Svensson, L. (1995), Estimating forward interest rates with the extended Nelson & Siegel method, *Sveriges Riskbank Quarterly Review*, No. 3, pp 13

- Vasicek, O. (1977), An Equilibrium Characterization of the Term Structure, *Journal of Financial Economics*, No. 5, pp 177-188
- Waggoner, D. F. (1997), Spline Methods for Extracting Interest Rate Curves from Coupon Bond Prices, *Federal Reserve Bank of Atlanta Working Paper*, No. 97-110
- Wu, X. (2000), A New Stochastic Duration Based on the Vasicek and CIR Term Structure Theories, *Journal of Business Finance and Accounting*, Vol. 27, No. 7&8, pp 911-932